Mathématiques

Mathématiques avancées 3230

Terre-Neuve Labrador

Programme d'études
2015

Table des matières

Remerciements iii

Introduction 1
- Objet du présent document 1
- Philosophie concernant les élèves et l'apprentissage des mathématiques 1
- Domaine affectif 2
- Des buts pour les élèves 2

Cadre conceptuel des mathématiques 10-12 3
- Les processus mathématiques 3
- La nature des mathématiques 7
- Résultats d'apprentissage transdisciplinaires 10
- Les résultats d'apprentissage et les indicateurs de rendement 11
- Organisation des cours de mathématiques 10e à 12e année 12
- Sommaire 12

Évaluation 13
- Stratégies d'évaluation 15

Orientation pédagogique 17
- Planification de l'enseignement 17
- Séquence d'enseignement 17
- Temps d'enseignement par module 17
- Ressources 17

Résultats d'apprentissage généraux et spécifiques 18

Résultats d'apprentissage et indicateurs de rendement
- Module 1: Les fonctions polynomiales 19
- Module 2: Les transformations de fonctions 39
- Module 3: Les fonctions racine 69
- Module 4: La trigonométrie et le cercle unitaire 81
- Module 5: Les fonctions trigonométriques et leur graphique 103
- Module 6: Les identités trigonométriques 117
- Module 7: Les fonctions exponentielles 139
- Module 8: Les fonctions logarithmiques 157
- Module 9: Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton 179

Annexe 207

Références 221

Remerciements

Le ministère de l'Éducation tient à remercier le Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens (PONC), pour sa collaboration. Le *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques M-9* (mai 2006) et le *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques 10-12* (janvier 2008) ont été reproduits ou adaptés sous autorisation. Tous droits réservés.

Ce document est une traduction et une adaptation du document *Advanced Mathematics 3200 - Interim Edition, Department of Education - Curriculum Guide, 2013.*

Le ministère de l'Éducation désire aussi remercier le bureau des services en français qui a fourni les services de traduction ainsi que le Programme des langues officielles en éducation du Patrimoine canadien qui a fourni de l'aide financière à la réalisation de ce projet.

Enfin, nous remercions le comité du programme provincial de mathématiques, 12e année, ainsi que les enseignants et les conseillers pédagogiques qui ont contribué à l'élaboration de ce programme d'études.

Tous les efforts ont été déployés pour reconnaître les diverses sources ayant contribué à la rédaction du présent document.

Toute omission ou erreur éventuelle sera rectifiée dans la version finale.

À NOTER : Dans le présent document, le masculin est utilisé à titre épicène.

INTRODUCTION

Objet du présent document

Le programme d'études présente des attentes élevées pour les élèves.

Les programmes d'études de mathématiques de la province de Terre-Neuve-et-Labrador ont été établis à partir du *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques 10-12*, *Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens*, janvier 2008. Ces programmes incorporent le cadre conceptuel des mathématiques de la 10e à la 12e année, ainsi que les résultats d'apprentissage généraux et spécifiques et les indicateurs de rendement établis dans le cadre commun des programmes d'études. Ils incluent aussi des stratégies d'enseignement et d'apprentissage, des suggestions de stratégies d'évaluation et font la correspondance entre le programme et la ressource autorisée et le matériel recommandé.

Philosophie concernant les élèves et l'apprentissage des mathématiques

La compréhension mathématique se construit à partir des expériences personnelles et des connaissances antérieures de chacun des élèves.

Les élèves sont des apprenants curieux et actifs ayant tous des intérêts, des habiletés et des besoins qui leur sont propres. Chacun arrive à l'école avec son propre bagage de connaissances, de vécu et d'acquis. Un élément clé de la réussite du développement de la numératie est l'établissement de liens entre ces acquis et ce vécu.

Les élèves apprennent quand ils peuvent attribuer une signification à ce qu'ils font; et chacun d'entre eux doit construire son propre sens des mathématiques. C'est en allant du plus simple au plus complexe ou du plus concret au plus abstrait que les élèves ont le plus de possibilités de développer leur compréhension des mathématiques. Il existe de nombreuses approches pédagogiques et matériel de manipulation destinées aux enseignants qui ont à composer avec les multiples modes d'apprentissage et cultures de leurs élèves ainsi qu'avec leurs stades de développement respectifs. Ces approches concourent au développement de concepts mathématiques valides et transférables: quels que soient leurs niveaux, tous les élèves bénéficieront d'un enseignement appuyé par une variété de matériaux, d'outils et de contextes pour développer leurs conceptions personnelles des nouvelles notions de mathématiques qui leur sont proposées. La discussion entre élèves peut engendrer des liens essentiels entre des représentations concrètes, imagées et symboliques des mathématiques.

Le milieu d'apprentissage offert aux élèves devrait mettre en valeur et respecter leur vécu et tous leurs modes de pensée, quels qu'ils soient. Ainsi, tout élève devrait se sentir en mesure de prendre des risques intellectuels en posant des questions et en formulant des hypothèses. L'exploration de situations de résolution de problèmes est essentielle au développement de stratégies personnelles et de littératie mathématique. Les élèves doivent se rendre compte qu'il est tout à fait acceptable de résoudre des problèmes de différentes façons et d'arriver à diverses solutions.

Domaine affectif

Il est important que les élèves développent une attitude positive envers les matières qui leur sont enseignées, car cela aura un effet profond et marquant sur l'ensemble de leurs apprentissages. Les environnements qui offrent des chances de succès et favorisent le sentiment d'appartenance ainsi que la prise de risques contribuent au maintien de l'attitude positive des élèves et de leur confiance en eux-mêmes. Les élèves qui feront preuve d'une attitude positive envers les mathématiques seront vraisemblablement motivés et disposés à apprendre, à participer à des activités, à persévérer pour que leurs problèmes ne demeurent pas irrésolus, et à s'engager dans des pratiques réflexives.

Pour réussir, les élèves doivent apprendre à se fixer des objectifs réalisables et à s'autoévaluer lorsqu'ils s'efforcent de les réaliser.

Les enseignants, les élèves et les parents doivent comprendre la relation qui existe entre les domaines affectif et intellectuel; et ils doivent s'efforcer de miser sur les aspects affectifs de l'apprentissage qui contribuent au développement d'attitudes positives. Pour réussir, les élèves doivent apprendre à se fixer des objectifs réalisables et à s'autoévaluer au fur et à mesure qu'ils s'efforcent de réaliser ces objectifs.

L'aspiration au succès, à l'autonomie et au sens des responsabilités englobe plusieurs processus à plus ou moins longs termes, et elle implique des retours réguliers sur les objectifs personnels fixés et sur l'évaluation de ces mêmes objectifs.

Des buts pour les élèves

Dans l'enseignement des mathématiques, les principaux buts sont de préparer les élèves à :

L'enseignement des mathématiques doit préparer les élèves à utiliser les mathématiques avec confiance pour résoudre des problèmes.

- utiliser les mathématiques avec confiance pour résoudre des problèmes;
- communiquer et raisonner en termes mathématiques;
- apprécier et valoriser les mathématiques;
- établir des liens entre les mathématiques et son utilisation;
- s'engager dans un processus d'apprentissage pour le reste de leur vie;
- devenir des adultes compétents en mathématiques, et mettre à profit leur compétence en mathématiques afin de contribuer à la société.

Les élèves qui ont atteint ces buts vont :

- comprendre et apprécier les contributions des mathématiques en tant que science, philosophie et art;
- afficher une attitude positive envers les mathématiques;
- entreprendre des travaux et des projets de mathématiques, et persévérer à les compléter;
- contribuer à des discussions sur les mathématiques;
- prendre des risques lorsqu'ils font des travaux de mathématiques;
- faire preuve de curiosité.

CADRE CONCEPTUEL DES MATHÉMATIQUES 10-12

Le diagramme ci-dessous montre l'influence des processus mathématiques ainsi que de la nature même des mathématiques sur les résultats d'apprentissage.

NIVEAUX / SUJETS D'ÉTUDE	10	11	12
Les sujets d'étude varient selon le cours de mathématiques de la 10e à la 12e année. Les sujets abordés dans ces cours peuvent comprendre : • l'algèbre • les mathématiques financières • la géométrie • le raisonnement logique • le projet de recherche mathématique • la mesure • le nombre • les permutations, les combinaisons et le théorème de Newton • la probabilité • les relations et les fonctions • la statistique • la trigonométrie	**RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE GÉNÉRAUX ET SPÉCIFIQUES, ET INDICATEURS DE RENDEMENT**		

NATURE DES MATHÉMATIQUES

Changement, constance, sens du nombre, régularités, relations, sens spatial, incertitude

PROCESSUS MATHÉMATIQUES — COMMUNICATION, LIENS, CALCUL MENTAL ET ESTIMATION, RÉSOLUTION DE PROBLÈMES, RAISONNEMENT, TECHNOLOGIE, VISUALISATION

Les processus mathématiques

Dans un programme de mathématiques, il y a des éléments auxquels les élèves doivent absolument être exposés pour être en mesure d'atteindre les objectifs de ce programme et acquérir le désir de poursuivre leur apprentissage des mathématiques pendant le reste de leur vie.

Les élèves devraient :

- communiquer pour apprendre des concepts et pour exprimer leur compréhension;
- établir des liens entre des idées et des concepts mathématiques, des expériences de la vie de tous les jours et d'autres disciplines;
- démontrer une habileté en calcul mental et en estimation;
- développer de nouvelles connaissances en mathématiques et les appliquer pour résoudre des problèmes;
- développer le raisonnement mathématique;
- choisir et utiliser des outils technologiques pour apprendre et pour résoudre des problèmes;
- développer des habiletés en visualisation pour faciliter le traitement d'informations, l'établissement de liens et la résolution de problèmes.

- *Communication [C]*
- *Liens [L]*
- *Calcul mental et estimation [CE]*
- *Résolution de problème [RP]*
- *Raisonnement [R]*
- *Technologie [T]*
- *Visualisation [V]*

Le programme d'études incorpore ces sept processus mathématiques intimement liés, qui ont pour but d'infuser l'enseignement et l'apprentissage.

La communication [C]

Les élèves doivent être capables de communiquer des idées mathématiques de plusieurs façons et dans des contextes variés.

Les élèves doivent avoir des occasions de lire et d'écrire de courts textes au sujet de notions mathématiques, d'en représenter, d'en voir, d'en entendre parler et d'en discuter. Cela favorise chez eux la création de liens entre leur propre langue et leurs idées, et le langage formel et les symboles des mathématiques.

La communication joue un rôle important dans l'éclaircissement, l'approfondissement et la rectification d'idées, d'attitudes et de croyances relatives aux mathématiques. L'utilisation d'une variété de formes de communication par les élèves ainsi que le recours à la terminologie mathématique doivent être encouragés tout au long de leur apprentissage des mathématiques.

La communication peut aider les élèves à établir des liens entre les représentations concrètes, imagées, symboliques, verbales, écrites et mentales de concepts mathématiques.

Les liens [L]

En établissant des liens, les élèves devraient commencer à trouver les mathématiques utiles et pertinentes.

La mise en contexte et l'établissement de liens avec les expériences de l'apprenant jouent un rôle important dans le développement de leur compréhension des mathématiques. Lorsque des liens sont créés entre des idées mathématiques ou entre ces idées et des phénomènes concrets, les élèves peuvent commencer à voir l'utilité, la pertinence et l'intégration des mathématiques dans la vie de tous les jours.

L'apprentissage des mathématiques en contexte et l'établissement de liens pertinents à l'apprenant peuvent valider des expériences antérieures et accroître la volonté de l'élève à participer et à s'engager activement.

Le cerveau recherche et établit sans cesse des liens et des relations, et : « *Étant donné que l'apprenant est constamment à la recherche de liens, et ce, à plusieurs niveaux, ses enseignants doivent orchestrer des expériences desquelles l'apprenant tirera une compréhension. Les recherches sur le cerveau ont déjà démontré que des expériences multiples, complexes et concrètes, sont essentielles à un apprentissage et à un enseignement constructifs*. » (Caine and Caine, 1991, p. 5 [traduction])

Le calcul mental et l'estimation [CE]

Le calcul mental et l'estimation sont des éléments fondamentaux du sens des nombres.

Le calcul mental est une combinaison de stratégies cognitives qui renforcent la flexibilité de la pensée et le sens des nombres. C'est un exercice qui se fait dans l'absence d'aide-mémoires externes.

Le calcul mental permet aux élèves de trouver des réponses sans crayon ni papier. Il améliore la puissance de calcul par son apport d'efficacité, de précision et de flexibilité.

Encore plus importante que la capacité d'exécuter des procédures de calcul ou d'utiliser une calculatrice est la facilité accrue dont les élèves ont besoin – plus que jamais – en estimation et en calcul mental. (NCTM, mai 2005)

Les élèves compétents en calcul mental « *sont libérés de la dépendance à une calculatrice, développent une confiance dans leur capacité de faire des mathématiques et une flexibilité intellectuelle qui leur permet d'avoir recours à de multiples façons de résoudre des problèmes.* » (Rubenstein, 2001)

Le calcul mental « *est la pierre angulaire de tout procédé d'estimation où il existe une variété d'algorithmes et de techniques non standards pour arriver à une réponse.* » (Hope, 1988)

L'estimation comprend diverses stratégies utilisées pour déterminer des valeurs ou des quantités approximatives (en se basant habituellement sur des points de repère ou des référents), ou pour vérifier le caractère raisonnable ou la plausibilité des résultats de calculs. Il faut que les élèves sachent quand et comment ils doivent procéder à des estimations ainsi que quelles stratégies d'estimation ils doivent choisir.

L'estimation est courante dans la vie quotidienne. Elle sert à faire des jugements mathématiques et à élaborer des stratégies utiles et efficaces pour traiter de situations dans la vie de tous les jours.

La résolution de problèmes [RP]

À tous les niveaux, l'apprentissage des mathématiques devrait être centré sur la résolution de problèmes.

À tous les niveaux, l'apprentissage des mathématiques devrait être centré sur la résolution de problèmes. Lorsque des élèves font face à des situations nouvelles et répondent à des questions telles que « *Comment devriez-vous savoir...*? » ou « *Comment pourriez-vous...*? », le processus de résolution de problème est enclenché. Les élèves peuvent développer leurs propres stratégies de résolution de problèmes en demeurant ouverts aux suggestions, en discutant et en testant différentes stratégies.

Pour que cette activité en soit une de résolution de problème, il faut demander aux élèves de trouver une façon d'utiliser leurs connaissances antérieures pour arriver à la solution recherchée. Si on a déjà donné aux élèves des façons de résoudre le problème, ce n'est plus d'un problème qu'il s'agit, mais d'un exercice. Un vrai problème exige que les élèves utilisent leurs connaissances antérieures d'une façon différente et dans un nouveau contexte. La résolution de problèmes est donc une activité qui exige une profonde compréhension des concepts et un engagement de l'élève. Celui-ci doit donc développer cette compréhension et démontrer son engagement.

La résolution de problèmes est un outil pédagogique puissant, qui encourage l'élaboration de solutions créatives et novatrices. L'observation de problèmes en cours de formulation ou de résolution peut encourager les élèves à explorer plusieurs solutions possibles. Par ailleurs, un environnement dans lequel les élèves se sentent libres de rechercher ouvertement différentes stratégies contribue au fondement de leur confiance en eux-mêmes et les encourage à prendre des risques.

Le raisonnement [R]

Le raisonnement aide les élèves à donner un sens aux mathématiques et à penser logiquement.

Le raisonnement aide les élèves à penser de façon logique et à saisir le sens des mathématiques. Les élèves doivent développer de la confiance dans leurs habiletés à raisonner et à justifier leurs raisonnements mathématiques. Le défi relié aux questions d'un niveau plus élevé incite les élèves à penser et à développer leur curiosité devant les mathématiques.

Que ce soit dans une salle de classe ou non, des expériences mathématiques fournissent des occasions propices au raisonnement. Les élèves peuvent expérimenter et noter des résultats, analyser leurs observations, faire et vérifier des généralisations à partir de régularités. Les élèves peuvent arriver à de nouvelles conclusions en construisant sur ce qui est déjà connu ou supposé être vrai.

Les habiletés de raisonnement permettent aux élèves d'utiliser un processus logique pour analyser un problème pour arriver à une conclusion et pour justifier ou pour défendre cette conclusion.

Technologie [T]

La technologie contribue à l'apprentissage d'une gamme étendue de résultats d'apprentissage et permet aux élèves d'explorer et de créer des régularités, d'étudier des relations, de tester des conjectures et de résoudre des problèmes.

La technologie contribue à l'apprentissage d'une gamme étendue de résultats d'apprentissage et permet aux élèves d'explorer et de créer des régularités, d'étudier des relations, de tester des conjectures et de résoudre des problèmes.

À l'aide de calculatrices et d'ordinateurs, les élèves peuvent :

- explorer et démontrer des relations et des régularités mathématiques;
- organiser et présenter des données;
- faire des extrapolations et des interpolations;
- faciliter des calculs dans le contexte de la résolution de problèmes;
- réduire le temps consacré à des calculs fastidieux lorsque d'autres apprentissages ont la priorité;
- approfondir leur connaissance des opérations de base et tester des propriétés;
- développer leurs propres algorithmes de calcul;
- créer des régularités géométriques;
- simuler des situations;
- développer leur sens des nombres.

La technologie contribue à un environnement d'apprentissage propice à la curiosité grandissante des élèves, qui peut les mener à de belles découvertes en mathématiques et ce, à tous les niveaux.

Visualisation [V]

L'utilisation du matériel concret, de la technologie et d'une variété de représentations visuelles contribue au développement de la visualisation.

La visualisation « *met en jeu la capacité de penser en images, de percevoir, de transformer et de recréer différents aspects du monde visuel et spatial* » (Armstrong, 1993, p. 10 [Traduction]) Le recours à la visualisation dans l'étude des mathématiques facilite la compréhension de concepts mathématiques et l'établissement de liens entre eux.

Les images et le raisonnement imagé jouent un rôle important dans le développement du sens des nombres, du sens de l'espace et du sens de la mesure. La visualisation du nombre a lieu quand les élèves créent des représentations mentales des nombres.

La capacité de créer, d'interpréter et de décrire une représentation visuelle fait partie du sens de l'espace ainsi que du raisonnement spatial. La visualisation et le raisonnement spatial permettent aux élèves de décrire les relations parmi et entre des objets à trois dimensions et des figures à deux dimensions.

Le développement du sens de la mesure va au-delà de l'acquisition d'habiletés spécifiques en matière de mesurage. Le sens de la mesure inclut l'habileté de juger quand il est nécessaire de prendre des mesures et quand il est approprié de faire des estimations ainsi que la connaissance de plusieurs stratégies d'estimation. (Shaw et Cliatt, 1989 [Traduction])

La nature des mathématiques

Les mathématiques font partie des outils qui contribuent à la compréhension, à l'interprétation et à la description du monde dans lequel nous vivons. La définition de la nature des mathématiques comporte plusieurs éléments, auxquels on fera référence d'un bout à l'autre du présent document. Ces éléments incluent le changement, la constance, le sens des nombres, les régularités, les relations, le sens de l'espace et l'incertitude.

Le changement

Le changement constitue l'une des propriétés fondamentales des mathématiques et de l'apprentissage des mathématiques.

Il est important que les élèves se rendent compte que les mathématiques sont en état d'évolution constante et ne sont pas statiques. Ainsi, le fait de reconnaître le changement constitue un élément clé de la compréhension et de l'apprentissage des mathématiques.

En mathématiques, les élèves sont exposés à des modalités de changement et ils devront tenter d'en fournir des explications. Pour faire des prédictions, les élèves doivent décrire et quantifier leurs observations, y rechercher des régularités, et décrire les quantités qui restent invariables et celles qui varient. Par exemple, la suite 4, 6, 8, 10, 12, … peut être décrite de différentes façons, y compris les suivantes :

- *le nombre de perles d'une certaine couleur dans chaque rangée d'un motif*
- *compter par sauts de 2, à partir de 4*
- *une suite arithmétique, avec 4 comme premier terme, et une raison arithmétique de 2*
- *une fonction linéaire avec un domaine discret.*

(Steen, 1990, p. 184 [Traduction])

La constance

La constance peut être décrite de bien des façons, soit en termes de stabilité, de conservation, d'équilibre, d'états stationnaires, et de symétrie. (AAAS – Benchmarks, 1993, p. 270 [Traduction])

La constance peut-être décrite en termes de stabilité, de conservation, d'équilibre, d'états stationnaires et de symétrie.

Les mathématiques, comme toutes les sciences, ont pour objets des phénomènes qui demeurent stables, inchangés (autrement dit, constants), quelles que soient les conditions externes dans lesquelles ils sont testés. En voici quelques exemples :

- Le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un tipi est le même peu importe la longueur des poteaux.
- Pour tout triangle, la somme des angles intérieurs de ce triangle est toujours égale à 180°.
- La probabilité théorique d'obtenir le côté face après avoir lancé une pièce de monnaie est de 0,5.

La résolution de certains problèmes mathématiques exige que les élèves se concentrent sur des propriétés constantes. L'habileté des élèves à reconnaître de telles propriétés leur permet, par exemple, de résoudre des problèmes relatifs à la variation du taux de change, à la pente de droites données, à la variation directe, à la somme des angles de divers polygones, etc.

Le sens du nombre

Le sens du nombre, dont certains pourraient dire qu'il s'agit d'une simple intuition, constitue la base la plus fondamentale de la numératie. (Le ministère de l'Éducation de la Colombie-Britannique, 2000, p. 146 [Traduction])

Le sens du nombre est la compétence la plus fondamentale de la numératie.

Un sens véritable du nombre va bien au-delà de l'habileté à savoir compter, à mémoriser des faits et à appliquer de façon procédurale des algorithmes en situation. La maîtrise des faits devrait être acquise par l'élève en développant leur sens du nombre. La maitrise permet l'application des faits et facilite les calculs plus complexes mais ne devrait pas être atteinte au dépend de la compréhension du sens du nombre. l

Le développement du sens du nombre chez l'élève se fait à partir de l'établissement de liens entre les nombres et son vécu ainsi qu'en ayant recours à des repères et à des référents. Ce qui en résulte, c'est un élève qui possède un raisonnement de calcul fluide, qui développe de la souplesse avec les nombres et qui, en fin de compte, développe une intuition du nombre. L'évolution du sens du nombre est généralement un dérivé de l'apprentissage plutôt que le résultat d'un enseignement direct. Cependant, le développement du sens du nombre chez les élèves peut résulter de l'exécution de tâches mathématiques complexes où il leur est possible d'établir des liens avec leurs expériences individuelles et leurs apprentissages antérieurs.

Les régularités

Les mathématiques traitent de la reconnaissance, de la description et de la manipulation de régularités numériques et non numériques.

Les mathématiques traitent de la reconnaissance, de la description et de la manipulation de régularités numériques et non numériques. Les régularités figurent dans tous les domaines.

C'est en travaillant avec des régularités que les élèves établissent des liens à l'intérieur et au-delà des mathématiques. Ces habiletés contribuent à la fois aux interactions des élèves avec leur environnement et à la compréhension qui endécoule.

Les régularités peuvent être représentées de façon concrète, visuelle ou symbolique. Les élèves devraient développer une facilité de passer d'une représentation à une autre.

Les élèves doivent apprendre à reconnaître, prolonger, créer et utiliser des régularités mathématiques. Les régularités permettent aux élèves de faire des prédictions et de justifier leur raisonnement dans la résolution de problèmes routiniers et non routiniers.

C'est en apprenant à travailler avec les régularités dès leurs premières années que les élèves développent leur pensée algébrique, élément fondamental des mathématiques plus abstraites des années à venir.

Les relations

Les mathématiques sont utilisées pour décrire et expliquer des relations.

Les mathématiques sont un outil pour exprimer des faits naturels étroitement liés dans une perception globale du monde. Les mathématiques sont utilisées pour décrire et expliquer des relations. La recherche de relations au sein des nombres, des ensembles, des figures, des objets et des concepts fait partie de l'étude des mathématiques. Cette recherche de relations possibles nécessite la collection et l'analyse de données numériques ainsi que la description de relations, de façon imagée, symbolique, orale ou écrite.

Le sens spatial

Le sens spatial est un moyen d'interpréter l'environnement physique et d'y réfléchir.

Le sens spatial comprend la visualisation, l'imagerie mentale et le raisonnement spatial. Ces habiletés jouent un rôle crucial dans la compréhension des mathématiques.

Le sens spatial se développe par le biais d'expériences variées et d'interactions des élèves avec leur environnement. Il contribue à la capacité des élèves de résoudre des problèmes comprenant des objets à trois dimensions et des figures à deux dimensions. Le sens spatial est un moyen d'interpréter l'environnement physique ainsi que les objets à trois dimensions et des figures à deux dimensions et d'y réfléchir.

Il y a des problèmes qui exigent l'établissement de liens entre des nombres et des unités de mesure et les dimensions de certains objets. Le sens spatial permet aux élèves de prédire les effets qu'aura la modification de ces dimensions, ex: en doublant la longueur du côté d'un carré, on augmente son aire selon un facteur de quatre. En bref, le sens spatial leur permet de créer leurs propres représentations des formes et des objets et de les communiquer aux autres.

L'incertitude

L'incertitude est inhérente à toute formulation d'une prédiction.

En mathématiques, l'interprétation de données et les prédictions basées sur des données peuvent manquer de fiabilité.

Certains évènements et expériences génèrent des ensembles de données statistiques qui peuvent être utilisés pour faire des prédictions. Il est important de reconnaître que les prédictions (interpolations et extrapolations) basées sur ces régularités comportent nécessairement un certain degré d'incertitude.

La qualité d'une interprétation est directement reliée à la qualité des données. Les élèves qui ont conscience de l'incertitude sont en mesure d'interpréter des données et d'en évaluer la fiabilité.

La chance réfère à la prévisibilité d'un résultat donné. Au fur et à mesure que les élèves développent leur compréhension de la probabilité, le langage mathématique gagne en spécificité et permet de décrire le degré d'incertitude de façon plus précise.

Résultats d'apprentissage transdisciplinaires

Les résultats d'apprentissage transdisciplinaires sont des énoncés précisant les connaissances, les habiletés et les attitudes que tous les élèves doivent avoir acquises à la fin du secondaire. Les apprentissages confirment la nécessité pour les élèves d'établir des liens entre les disciplines. Les résultats d'apprentissage transdisciplinaires sont les suivants : *expression artistique, civisme, communication, développement personnel, résolution de problèmes, compétences technologiques, développement spirituel et moral, langue et culture françaises*.

Expression artistique

Les finissants seront en mesure de porter un jugement critique sur diverses formes d'art et de s'exprimer par les arts.

Civisme

Les finissants seront en mesure d'apprécier, dans un contexte local et mondial, l'interdépendance sociale, culturelle, économique et environnementale.

Communication

Les finissants seront capables de comprendre, de parler, de lire et d'écrire une langue (ou plus d'une), d'utiliser des concepts et des symboles mathématiques et scientifiques afin de penser logiquement, d'apprendre et de communiquer efficacement.

Développement personnel

Les finissants seront en mesure de poursuivre leur apprentissage et de mener une vie active et saine.

Résolution de problèmes

Les finissants seront capables d'utiliser les stratégies et les méthodes nécessaires à la résolution de problèmes, y compris les stratégies et les méthodes faisant appel à des concepts reliés à la langue, aux mathématiques et aux sciences.

Compétences technologiques

Les finissants seront en mesure d'utiliser diverses technologies, de faire preuve d'une compréhension des applications technologiques et d'appliquer les technologies appropriées à la résolution de problèmes.

Développement spirituel et moral

Les finissants sauront comprendre et apprécier le rôle des systèmes de croyances dans le façonnement des valeurs morales et du sens éthique.

Langue et cultures françaises

(Ce résultat ne s'applique qu'aux élèves du programme de Français langue première).

Les finissants seront conscients de l'importance et de la particularité de la contribution des Acadiens et des francophones à la société canadienne. Ils reconnaîtront leur langue et leur culture comme base de leur identité et de leur appartenance à une société dynamique, productive et démocratique dans le respect des valeurs culturelles des autres.

- *accéder à l'information en français provenant de divers médias et de la traiter.*
- *faire valoir leurs droits et d'assumer leurs responsabilités en tant que • francophones.*

Veuillez consulter le document *Foundations for the Atlantic CanadaMathematics Curriculum*.
Le programme de mathématiques vise à aider les élèves à atteindre les résultats d'apprentissage transdisciplinaires (RAT). Les énoncés relatifs à la communication, la résolution des problèmes et les compétences technologiques sont particulièrement pertinents aux processus mathématiques.

Les résultats d'apprentissage et les indicateurs de rendement

Les éléments du programme d'études sont formulés en termes de résultats d'apprentissage généraux, de résultats d'apprentissage spécifiques et d'indicateurs de rendement.

Résultats d'apprentissage généraux

Les résultats d'apprentissage généraux sont les énoncés d'ordre général des principaux apprentissages attendus des élèves dans chacun des domaines ou sous-domaines.

Résultats d'apprentissage spécifiques

Les résultats d'apprentissage spécifiques sont des énoncés plus précis des habiletés spécifiques, des connaissances et de la compréhension que les élèves devraient avoir acquises à la fin de chaque cours.

Dans ce document, l'expression « y compris » indique que tout élément qui suit est une partie intégrante du résultat d'apprentissage.
L'expression « tel que » indique que tout ce qui suit a été inclus à des fins d'illustration ou de clarification et ne constitue pas un élément essentiel pour atteindre le résultat d'apprentissage.

Indicateurs de rendement

Les indicateurs de rendement fournissent un exemple représentatif de la profondeur, de l'étendue et des attentes d'un résultat d'apprentissage. L'étendue des exemples se veut représentative de la profondeur du résultat d'apprentissage specifique. (RAS).
Les RAS représentent comment les élèves peuvent atteindre les résultats d'apprentissage généraux et ensuite les résultats d'apprentissages transdisciplinaires.

Organisation des cours de mathématiques 10e à 12e année

Filières	1er cours	2e cours	3e cours	4e cours
Avancée	Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230	Mathématiques 3238
Académique		Mathématiques 2231	Mathématiques 3231	
Appliquée	Mathématiques 1232	Mathématiques 2232	Mathématiques 3232	

Le programme de mathématiques appliquées vise à fournir aux élèves les connaissances mathématiques et les habiletés de pensée critique qui ont été ciblées pour l'admission à la majorité des programmes des écoles de métiers et pour l'entrée directe sur le marché du travail.

Les programmes de mathématiques académiques et avancés visent à fournir aux élèves les connaissances mathématiques et les habiletés de pensée critique nécessaires à l'entrée dans des programmes d'études postsecondaires. Les élèves qui réussissent le programme avancé seront mieux préparés pour les programmes qui comprennent des cours de calcul infinitésimal.

Les programmes visent à rendre les élèves capables d'établir des liens entre les mathématiques et leurs applications et à en faire des adultes qui soient aptes à calculer et à contribuer à la société par les mathématiques.

Sommaire

Le cadre conceptuel des mathématiques de la 10e à la 12e année (p. 3) décrit la nature des mathématiques, les processus mathématiques et les concepts mathématiques qui seront abordés. Les composantes ne doivent pas être prises isolément. Les activités réalisées dans les cours de mathématiques doivent être fondées sur une approche de résolution de problèmes et des processus mathématiques qui amèneront les élèves à comprendre la nature des mathématiques par l'acquisition de connaissances, d'habilités et d'attitudes précises dans un cadre interdisciplinaire.

ÉVALUATION

Buts de l'évaluation

L'apprentissage qui est évalué, la façon de l'évaluer et la façon dont les résultats sont communiqués envoient un message clair aux élèves et aux autres personnes concernées sur ce qui est véritablement valorisé.

Des techniques d'évaluation sont utilisées pour recueillir de l'information sur l'apprentissage. Cette information aide les enseignants à définir les forces et les besoins des élèves dans leur apprentissage des mathématiques et oriente les approches pédagogiques.

L'enseignant est encouragé à faire preuve de souplesse lorsqu'il évalue les résultats en matière d'apprentissage des élèves, et à chercher différentes façons de permettre aux élèves de démontrer leurs connaissances et leur savoir-faire.

L'*évaluation* consiste aussi à mettre en balance l'information recueillie relative à l'apprentissage et aux critères, afin d'évaluer ou de porter un jugement sur les résultats de l'élève.

L'évaluation a trois fonctions interdépendantes :

- l'évaluation *au service de* l'apprentissage a pour but d'orienter l'enseignement et d'y contribuer;
- l'évaluation *en tant qu'*apprentissage a pour but d'inciter les élèves à procéder à une autoévaluation et à établir des objectifs pour leur propre apprentissage;
- l'évaluation *de* l'apprentissage a pour but de porter un jugement sur le rendement de l'élève en lien avec les résultats d'apprentissage.

L'évaluation *au service de* l'apprentissage

L'évaluation *au service de* l'apprentissage exige des évaluations fréquentes et interactives conçues pour faire en sorte que la compréhension de l'élève soit évidente. Ceci permettra à l'enseignant de cerner les besoins en matière d'apprentissage et d'adapter son enseignement en conséquence. Il s'agit d'un processus continu d'enseignement et d'apprentissage.

L'évaluation *au service de* l'apprentissage :

- exige la collecte de données à l'aide de toute une gamme d'évaluations qui servent d'outils d'enquête pour en savoir le plus possible sur ce que l'élève sait;
- offre une rétroaction descriptive, précise et constructive aux élèves et aux parents en ce qui a trait au stade suivant d'apprentissage;
- fait participer activement les élèves à leur propre apprentissage du fait qu'ils s'autoévaluent et comprennent comment améliorer leur rendement.

L'évaluation *en tant qu'*apprentissage

L'évaluation *en tant qu'*apprentissage pousse l'élève à réfléchir activement à son propre apprentissage et à suivre ses propres progrès. Elle se concentre sur le rôle de l'élève comme lien essentiel entre l'évaluation et l'apprentissage, et développe et favorise du même coup la métacognition chez les élèves.

L'évaluation *en tant qu'*apprentissage :

- soutient les élèves par l'analyse critique de leurs connaissances en fonction des résultats d'apprentissage;
- incite les élèves à envisager des moyens de bonifier leur apprentissage;
- permet aux élèves d'utiliser l'information recueillie pour adapter leurs processus d'apprentissage et découvrir de nouvelles perspectives.

L'évaluation *de* l'apprentissage

L'évaluation *de* l'apprentissage fait intervenir des stratégies visant à confirmer ce que les élèves savent, à déterminer s'ils ont atteint les résultats d'apprentissage ou à vérifier les compétences des élèves et à prendre des décisions concernant leurs besoins futurs en matière d'apprentissage. L'évaluation *de* l'apprentissage a lieu à la fin d'une expérience d'apprentissage qui contribue directement aux résultats qui seront présentés.

Habituellement, l'enseignant se fie à ce type d'évaluation pour porter un jugement sur le rendement de l'élève; il mesure l'apprentissage après le fait, puis en rend compte aux autres.

Toutefois, l'utilisation de l'évaluation *de* l'apprentissage de concert avec les autres processus d'évaluation décrits précédemment a pour effet de renforcer ce type d'évaluation.

L'évaluation *de* l'apprentissage :

- offre l'occasion de rendre compte aux parents (ou tuteurs) et aux autres intervenants des réalisations de l'élève à ce jour en lien avec les résultats d'apprentissage;
- confirme les connaissances et le savoir faire de l'élève;
- a lieu à la fin d'une expérience d'apprentissage, au moyen d'outils variés.

Comme les conséquences de l'évaluation *de* l'apprentissage sont souvent très importantes, il incombe à l'enseignant de faire un compte rendu juste et équitable de l'apprentissage de chacun des élèves, en s'inspirant des renseignements tirés de toute une gamme de contextes et d'applications.

Stratégies d'évaluation

Les techniques de mesure doivent être adaptées au style d'apprentissage et d'enseignement utilisé. Les enseignants peuvent choisir parmi les nombreuses options proposées dans le présent guide en fonction des résultats d'apprentissage, de la classe et des politiques de l'école et du district scolaire.

Observations (formelles ou informelles)

Cette technique permet de recueillir de l'information assez rapidement pendant le déroulement de la leçon. Dans le cas des observations formelles, les élèves doivent être informés de l'observation et des critères utilisés. L'observation informelle peut prendre la forme d'une vérification fréquente, mais brève, en fonction de critères bien précis. L'observation peut fournir de l'information sur le niveau de participation d'un élève dans le cadre d'une tâche spécifique, de l'utilisation d'un appareil ou l'application d'un processus. Pour consigner les résultats, on peut utiliser une liste de contrôle, une échelle d'évaluation ou de brèves notes écrites. Une bonne planification est nécessaire pour définir les critères précis, préparer les relevés et veiller à ce que tous les élèves soient observés à l'intérieur d'une période raisonnable.

Performance

Ce programme d'études favorise l'apprentissage par la participation active. De nombreux résultats d'apprentissage du programme vise le développement des habiletés et leur application. Pour amener l'élève à comprendre l'importance du développement des habiletés, la mesure doit offrir une rétroaction sur les diverses habiletés. Il peut s'agir, par exemples, de la façon d'utiliser le matériel de manipulation, de la capacité d'interpréter et de suivre des instructions ou de chercher, d'organiser et de présenter de l'information. L'évaluation des performances se fait le plus souvent par l'observation du processus.

Papier et crayon

Cette technique peut être formative ou sommative. Peu importe le type d'évaluation, l'élève doit connaître les attentes associées à l'exercice et comment il sera évalué. Des travaux écrits et des tests peuvent être utilisés pour évaluer les connaissances, la compréhension et l'application des concepts. Ces techniques sont toutefois moins appropriées pour l'évaluation des processus et des attitudes. Le but de l'évaluation devrait déterminer la technique d'évaluation utilisée.

Journal

Le journal d'apprentissage permet à l'élève d'exprimer des pensées et des idées dans le cadre d'une réflexion. En inscrivant ses sentiments, sa perception de la réussite et ses réactions face à de nouveaux concepts, l'élève peut être amené à identifier le style d'apprentissage qui lui convient le mieux. Savoir comment apprendre de façon efficace constitue une information très utile. Les inscriptions au journal fournissent également des indicateurs sur les attitudes développées face aux concepts, aux processus et aux habiletés scientifiques, et sur leur application dans la société. L'auto-évaluation, par le biais d'un journal d'apprentissage, permet à l'élève d'examiner ses forces et ses faiblesses, ses attitudes, ses intérêts et de nouvelles idées. Le développement de ces habitudes aidera l'élève dans ses futurs choix académiques et professionnels.

Entrevue

Le présent programme d'études encourage la compréhention et l'application des concepts mathématiques. En interviewant un élève, l'enseignant peut confirmer que l'apprentissage va au-delà de la mémorisation des faits. La discussion permet également à l'élève de démontrer sa capacité d'utiliser l'information et de préciser sa compréhension. L'entrevue peut prendre la forme d'une courte discussion entre l'enseignant et l'élève ou elle peut être plus exhaustive et inclure l'élève, un parent et l'enseignant. Ces entretiens permettent à l'élève d'afficher ses savoirs de façon proactive. Les élèves doivent être informés des critères qui seront utilisés lors des entrevues formelles. Cette technique de mesure donne une chance aux élèves qui s'expriment mieux verbalement que par écrit.

Présentation

Ce programme d'études comprend des résultats d'apprentissage qui demandent que les élèves soient capables d'analyser et d'interpréter de l'information, de travailler en équipe et de communiquer de l'information. Les présentations constituent la meilleure façon de démontrer et d'évaluer ces résultats. Les présentations peuvent être faites oralement, par écrit ou en images, sous forme de résumé de projet ou par voie électronique (vidéo, présentation sur ordinateur). Peu importe le degré de complexité ou le format utilisé, l'évaluation doit être fondée sur les résultats d'apprentissage. Ceux-ci précisent le processus, les concepts et le contexte pour lesquels et à propos desquels la présentation est réalisée.

Portfolio

Le portfolio permet de mesurer les progrès de l'élève par rapport aux résultats d'apprentissage sur une plus longue période de temps. Il permet à l'élève d'être au cœur du processus d'apprentissage. Certaines décisions au sujet du portfolio et de son contenu peuvent être confiées à l'élève. Que contient le portfolio, quels sont les critères de sélection, comment le portfolio est utilisé, comment et où il est rangé et comment il est évalué sont autant de questions dont il faut tenir compte lorsqu'on planifie de réunir et d'afficher les travaux des élèves de cette façon. Le portfolio devrait fournir un compte-rendu à long terme du développement de l'apprentissage et des habiletés. Ce dossier est important pour la réflexion individuelle et l'auto-évaluation mais il est aussi important de le partager avec d'autres. Tous les élèves, spécialement les plus jeunes, sont emballés à la perspective d'examiner un portfolio et de constater le développement au fil du temps.

ORIENTATION PÉDAGOGIQUE

Planification de l'enseignement

Les remarques ci-dessous devraient être prises en compte lors de la planification de l'enseignement:

- Les processus mathématiques doivent être intégrés dans chacun des sujets à l'étude.
- En réduisant la grandeur des nombres utilisés dans les calculs écrits et en mettant moins l'accent sur la mémorisation de calculs ou la pratique répétitive de l'arithmétique, l'enseignant pourra consacrer plus de temps à l'enseignement de concepts.
- La résolution de problèmes, le raisonnement et l'établissement de liens jouent un rôle crucial dans la croissance de la pensée mathématique.
- Il doit y avoir un équilibre entre le calcul mental et l'estimation, les calculs écrits et l'utilisation de la technologie, y compris les calculatrices et les ordinateurs. Les concepts devraient être présentés aux élèves à l'aide de matériel de manipulation, puis passer graduellement du concret à l'image et au symbole.
- Les élèves apportent à l'école de la diversité en ce qui concerne les styles d'apprentissage et les milieux culturels. Ils sont également à des stades de développement différents.

Séquence d'enseignement

Le programme d'études de Mathématiques avancées 3230 est organisé en modules. Il s'agit uniquement d'un ordre suggéré pour le cours. Il existe diverses combinaisons de séquences qui peuvent convenir à l'enseignement de ce cours.

Chaque double page indique le domaine, le résultat d'apprentissage général et le résultat d'apprentissage spécifique. À noter que ce cours pourrait aussi être enseigné par domaine.

Temps d'enseignement par module

Le nombre d'heures d'enseignement par module est indiqué sur la première page de chaque module. Le nombre d'heures suggéré inclut le temps consacré aux activités d'évaluation et de révision. Les durées suggérées au début de chaque module existent pour aider l'enseignant dans sa planification. Il n'est pas obligatoire de suivre ces durées. Cependant, pendant l'année scolaire l'enseignement de tous les résultats d'apprentissage est obligatoire et une planification à long terme est conseillée. L'enseignement des résultats d'apprentissage a lieu au cours de l'année et l'enseignant peut les revoir au besoin.

Ressources

Les ressources sélectionnées et autorisées par la province Terre-Neuve-et-Labrador pour les élèves et les enseignants est *Mathématiques pré-calcul 12 (Chenelière, 2012)*. C'est pour cette raison que la quatrième colonne du programme d'études fait référence à ces ressources.

Les enseignants peuvent utiliser d'autres ressources ou combinaison de ressources pour obtenir les résultats spécifiques visés.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE GÉNÉRAUX ET SPÉCIFIQUES

RÉSULTATS GÉNÉRAUX ET SPÉCIFIQUES AVEC INDICATEURS DE RENDEMENT (pages 19 à 206)

Cette section présente les résultats généraux et spécifiques avec les indicateurs de rendement correspondants; elle est organisée par module. La liste d'indicateurs contenue dans cette section ne se veut pas exhaustive. Elle a plutôt pour but de fournir aux enseignants des exemples de preuve de compréhension qui peuvent être utilisés pour déterminer si les élèves ont atteint, ou non, un résultat d'apprentissage spécifique donné. Les enseignants peuvent utiliser autant d'indicateurs de rendement qu'ils le désirent ou ajouter d'autres indicateurs comme preuve de l'apprentissage recherché. Les indicateurs de rendement devraient aussi aider les enseignants à se former une image claire de l'intention et de la portée de chacun des résultats d'apprentissage spécifiques.

Le cours de Mathématiques avancées 3230 est organisé en neuf modules:

- Les fonctions polynomiales
- Les transformations de fonctions
- Les fonctions racine
- La trigonométrie et le cercle unitaire
- Les fonctions trigonométriques et leur graphique
- Les identités trigonométriques
- Les fonctions exponentielles
- Les fonctions logarithmiques
- Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Les fonctions polynomiales

Durée suggérée: 14 heures

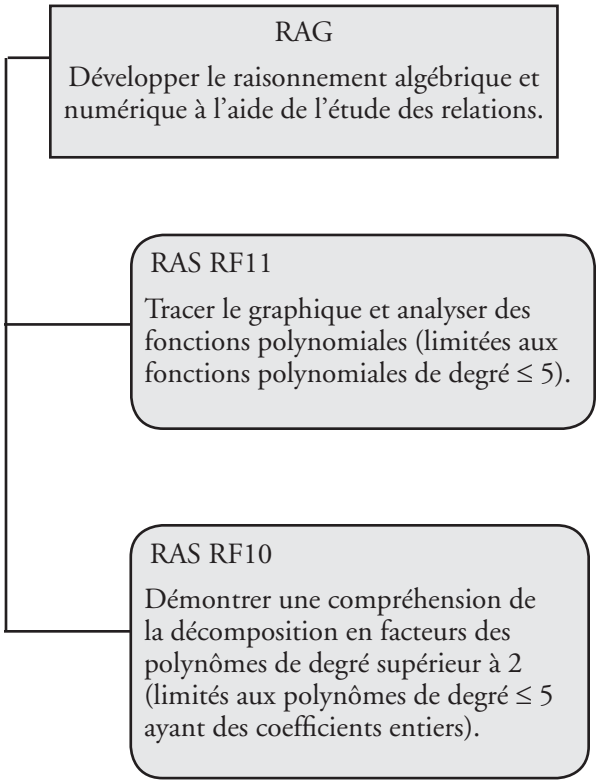
Aperçu du module

Orientation et contexte

Dans ce module, les travaux antérieurs sur les fonctions quadratiques seront approfondis pour comprendre les fonctions polynomiales du cinquième degré et moins.

Les élèves appliqueront le théorème du zéro entier, la division synthétique et des techniques de factorisation pour déterminer les zéros de fonctions cubiques, quartiques et quintiques. Ils relieront les zéros aux abscisses à l'origine du graphique, puis ils représenteront le graphique de fonctions polynomiales et les analyseront.

Cadre des résultats d'apprentissage



Processus mathématiques

[C] Communication
[L] Liens
[RP] Résolution de problèmes
[V] Visualisation
[CE] Calcul mental et estimation
[R] Raisonnement
[T] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
Relations et Fonctions		
AN5. Démontrer une compréhension de diviseurs (facteurs) communs et de la factorisation (décomposition en facteurs) de trinômes de façon concrète, imagée et symbolique. [C, L, R, V] RF1. Interpréter et expliquer les relations parmi des données, des graphiques et des situations. [C, L, R, T, V] RF2. Démontrer une compréhension de relations et de fonctions. [C, R, V] RF6. Associer les relations linéaires exprimées sous la forme: • Explicite: $y = mx + b$ • Générale: $Ax + By + C = 0$ • Pente-point: $y - y1 = m(x - x1)$ à leurs graphiques. [L, R, T, V]	RF1. Décomposer en facteurs les expressions polynomials de la forme suivante: • $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ • $a^2x^2 - b^2y^2, a \neq 0, b \neq 0$ • $a(f(x))^2 + b(f(x)) + c, a \neq 0$ • $a^2(f(x))^2 - b^2(g(y))^2, a \neq 0, b \neq 0$ où a, b et c sont des nombres rationnels. [L, CE, R] RF3. Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = a(x - p)^2 + q$, et determiner: • le sommet • le domaine et l'image • la direction de l'ouverture • l'axe de symétrie • les coordonnées à l'origine [L, R, T, V] RF4. Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour identifier les caractéristiques du graphique correspondant, y compris: • Le sommet • Le domaine et l'image • La direction de l'ouverture • L'axe de symétrie • Les coordonnés à l'origine pour résoudre des problèmes. [L, RP, R, T, V] RF5. Résoudre des problèmes comportant des équations quadratiques. [C, L, RP, R, T, V] RF7. Résoudre des problèmes comportant des inégalités linéaires et quadratiques ayant deux variables. [C, RP, T, V] RF8. Résoudre des problèmes comportant des inégalités quadratiques ayant une variable. [L, RP, V]	RF10. Démontrer une comprehension de la décomposition en facteurs des polynômes de degré supérieur à 2 (limités aux polynômes de degré ≤ 5 ayant des coefficients entiers). [C, L, CE] RF11. Tracer le graphique et analyser des fonctions polynomiales (limitées aux fonctions polynomiales de degré ≤ 5). [C, L, T, V]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF11. Tracer le graphique et analyser des fonctions polynomiales (limitées aux fonctions polynomiales de degré ≤ 5).

[C, L, T, V]

Indicateurs de rendement:

RF11.1 *Identifier, d'un ensemble de fonctions, lesquelles sont des fonctions polynomiales et expliquer le raisonnement..*

RF11.2 *Expliquer comment le terme constant et le coefficient de la puissance la plus élevée dans l'équation d'une fonction polynomiale influencent la forme de son graphique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 1231, les élèves ont relié des expressions linéaires exprimées sous la forme pente-ordonnée à l'origine, sous la forme générale et sous la forme pente-point à leur graphique (RF6). Dans le cours Mathématiques 2230, ils ont analysé des fonctions quadratiques pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant (RF3, RF4). Dans ce module, les élèves traceront et analyseront des fonctions polynomiales du cinquième degré ou moins.

Les fonctions linéaires et quadratiques sont des exemples de fonctions polynomiales que les élèves ont déjà étudiées. Ils approfondiront maintenant leur étude des fonctions polynomiales pour y inclure les fonctions cubiques, quartiques et quintiques. Une fonction de la forme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où $a_n \neq 0$, est une fonction polynomiale de degré n, dans laquelle a_n est le coefficient dominant. Les élèves ont déjà dessiné des graphiques de fonctions de degré 0, 1 et 2. Ils devraient reconnaître ce qui suit :

Fonction	Degré	Type de fonction	Graphique
$f(x) = a$	0	constante	ligne horizontale
$f(x) = ax + b$	1	linéaire	ligne de pente a
$f(x) = ax^2 + bx + c$	2	quadratique	parabole

Les élèves seront maintenant initiés à certaines caractéristiques de base des graphiques de fonctions polynomiales de degré supérieur à 2 :

- Le graphique d'une fonction polynomiale est continu.
- Le graphique d'une fonction polynomiale n'a que des courbes lisses. Une fonction de degré n comporte au plus $n - 1$ changements de direction.
- Si le coefficient dominant de la fonction polynomiale est positif, alors le graphique se prolonge vers le haut à droite. Si le coefficient dominant est négatif, alors le graphique se prolonge ver le bas à droite.
- Le terme constant est l'ordonnée à l'origine du graphique.

À ce stade, l'objectif est de faire en sorte que les élèves apprennent à reconnaître ces caractéristiques de base. Plus loin dans l'unité, ils utiliseront ces caractéristiques, le tracé point par point et les coordonnées à l'origine pour dessiner des esquisses raisonnablement précises.

Pour examiner les caractéristiques de base, les élèves pourraient représenter graphiquement les fonctions polynomiales à l'aide de la technologie, comme une calculatrice graphique ou des logiciels tels que FX Draw et WinPlot. Des applications graphiques sur les appareils mobiles des élèves pourraient aussi être utilisées.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Les élèves doivent déterminer si chacun des éléments suivants est une fonction polynomiale et expliquer leur raisonnement.

  (i) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$

  (ii) $f(x) = 3x^3 + 4$

(RF11.1)

- Demander aux élèves d'identifier les caractéristiques du graphique correspondant à la fonction $f(x) = -3x^2 + 9x + x^5$.

(RF11.2)

Entrevue

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  i) Combien de tournants peut-il y avoir dans le graphique d'une fonction polynomiale de degré 5? Expliquez.

  ii) Décrivez les caractéristiques des graphiques des fonctions cubiques et quartiques avec le plus grand nombre possible de termes.

(RF11.2)

Performance

- Les élèves peuvent travailler en groupes pour relier les équations au graphique correspondant. Ils devraient expliquer les caractéristiques qui ont guidé leur choix de graphique.

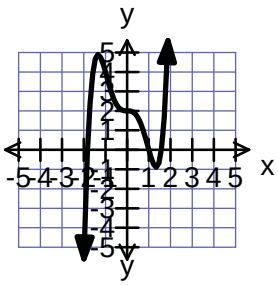
<u>Fonctions:</u>

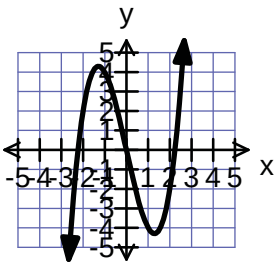
$f(x) = x^3 - 5x$

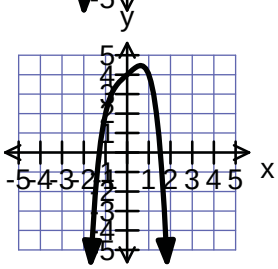
$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2$

$f(x) = -x^4 + x + 4$

<u>Graphiques:</u>







(RF11.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

3.1 Les caractéristiques des fonctions polynomiales

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 106-117

Guide d'enseignement (GE): pp. 62-66

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

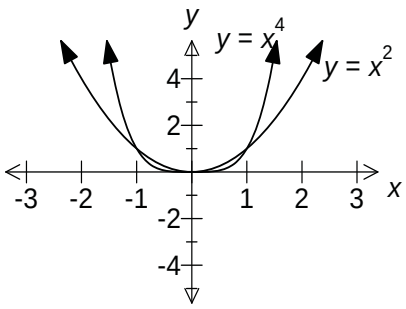
RF11 Suite ...

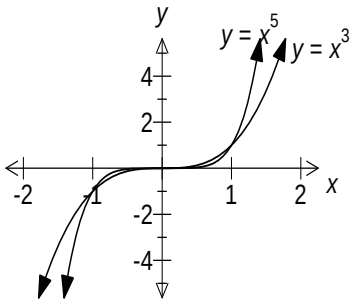
Indicateur de rendement:

RF11.3 *Formuler des règles générales pour représenter graphiquement des fonctions polynomiales de degré pair ou impair.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves devraient étudier les graphiques de différentes fonctions polynomiales de degrés pairs et impairs. Les fonctions polynomiales dont le graphique est le plus simple sont les fonctions monômes $f(x) = a_n x^n$. Lorsque n est pair, le graphique ressemble à celui de la fonction $f(x) = x^2$. Lorsque n est impair, le graphique ressemble à celui de la fonction $f(x) = x^3$. Plus grande la valeur de n, plus la courbe d'un monôme est plate sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$.





Dans leurs études, les élèves devraient se rendre compte que si le degré d'un polynôme est pair, les extrémités gauche et droite du graphique se comporteront de la même manière. Par exemple, le graphique de $f(x) = x^4$, s'élève vers la droite et vers la gauche. Il s'étend vers le haut dans le quadrant II et vers le haut dans le quadrant I. Lorsque le degré est impair, les extrémités gauche et droite du graphique se comportent de manières opposées. Par exemple, le graphique de $f(x) = -x^3$ se prolonge vers le bas à droite et monte vers la gauche. Il se prolonge vers le haut dans le quadrant II et vers le bas dans le quadrant IV.

Les élèves peuvent utiliser des technologies graphiques pour déterminer les similitudes et les différences entre des fonctions polynomiales comme les suivantes :

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = x^2 + 2x - 3$
- $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
- $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$
- $f(x) = 0{,}2x^5 - x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 1{,}4x - 9$

Ils peuvent dessiner le graphique de chacune de ces fonctions en utilisant un coefficient dominant négatif. Ils devraient ainsi repérer une régularité dans le graphique des fonctions de degré pair et impair. Ils doivent prendre note des similitudes entre la manière dont les extrémités se comportent, les termes constants et le nombre d'abscisses à l'origine. Les exemples devraient être limités à des fonctions polynomiales comportant des abscisses à l'origine pour permettre aux élèves de repérer facilement les similitudes.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de créer un pliage ou un organisateur graphique pour résumer les règles de la représentation graphique des fonctions polynomiales de degré pair ou impair.

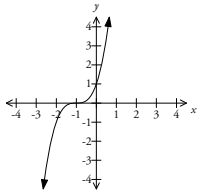
(RF11.3)

Performance

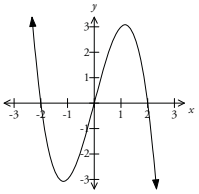
- L'activité *Choisir et lancer* donne aux élèves l'occasion de choisir une réponse de façon anonyme puis de donner une justification pour la réponse choisie. Fournir aux élèves une question à choix de réponse comme dans l'exemple ci-dessous. Les élèves écrivent leur réponse, froissent leur solution en boule et jettent leur papier dans un panier. Une fois que tous les documents sont dans le panier, demander aux élèves d'en piger un. Ils se rendent ensuite dans le coin de la pièce associé à la réponse inscrite sur le papier qu'ils ont pigé. Les groupes de chaque coin devraient discuter des similitudes et des différences dans les explications fournies et faire rapport à la classe.

Lequel des choix suivants est le graphique d'une fonction de degré pair?

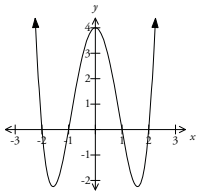
(A)



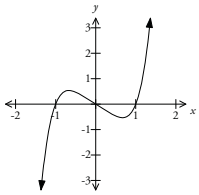
(B)



(C)



(D)



Expliquez votre raisonnement :

(RF11.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

3.1 Les caractéristiques des fonctions polynomiales

MÉ: pp. 106-117

GE: pp. 62-66

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF10. Démontrer une comprehension de la decomposition en facteurs des polynômes de degré supérieur à 2 (limités aux polynômes de degré ≤ 5 ayant des coefficients entiers).

[C, L, CE]

Indicateurs de rendement:

RF10.1 *Expliquer en quoi l'algorithme de la division d'un polynôme par un binôme de la forme x - a, a ∈ Z est relié à la division synthétique.*

RF10.2 *Diviser un polynôme par un binôme de la forme x - a, a ∈ Z en ayant recours à l'algorithme de la division ou à la division synthétique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont été initiés aux techniques de factorisation de fonctions quadratiques dans le cours Mathématiques 1231 (AN5). Ils se sont servis des facteurs communs et de la factorisation de trinômes pour exprimer des fonctions quadratiques sous forme factorisée. Dans le cours Mathématiques 2230, ces techniques de factorisation ont été étendues (RF1) à la factorisation d'expressions à coefficient rationnel des formes suivantes :

- $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$
- $a^2x^2 - b^2y^2,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
- $a(f(x))^2 + b(f(x)) + c,\ a \neq 0$
- $a^2(f(x))^2 - b^2(g(y))^2,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$

Dans ce module, ces techniques serviront à factoriser des fonctions cubiques, quartiques et quintiques.

Pour factoriser des fonctions polynomiales de degré élevé, il peut combiner les techniques de factorisation à l'algorithme de la division ou à la division synthétique. Les élèves devraient être initiés à la division synthétique d'une manière qui la met en rapport avec l'algorithme de la division. Ils doivent se rendre compte que l'algorithme de la division de polynômes est semblable à la division d'expressions numériques. Pour déterminer le quotient de l'expression $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \div (x + 2)$, par exemple, tant l'algorithme de la division que la division synthétique pourraient être utilisées. Les élèves doivent se rendre compte du lien entre le diviseur et le dividende dans l'algorithme de la division, et entre la racine et les coefficients dans la division synthétique. La division synthétique nécessite ainsi moins de calculs.

L'algorithme de la division:

$$x+2\overline{\big)\,x^3-2x^2+3x-4}$$

Division synthétique :

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ & & -2 & 8 & -22 \\ \hline & 1 & -4 & 11 & \underline{|-26} \end{array}$$

Les enseignants devraient utiliser les deux méthodes pour permettre aux élèves de faire le lien entre chaque type de division. Lorsque le diviseur est une fonction linéaire de forme $(x - a)$, la division synthétique peut être considérée comme plus efficace que de faire l'algorithme de la division de deux polynômes. Même si la division synthétique peut être effectuée en utilisant l'opération d'addition ou de soustraction, il est recommandé d'utiliser l'opération d'addition. Il est ainsi possible de faire un lien entre la division synthétique et le théorème du reste.

Les élèves devraient voir qu'il peut y avoir un reste à la fin du processus. Dans l'exemple ci-dessus,

$$\left(x^3-2x^2+3x-4\right)\div\left(x+2\right)=\left(x^2-4x+11\right)+\frac{-26}{x+2}.$$

Les élèves doivent aussi être encouragés à tenir compte d'éventuelles restrictions. Dans ce cas particulier, $x \neq -2$. Ils ont eu à déterminer les valeurs non permises dans des expressions rationnelles dans le cours Mathématiques 2230 (4N4).

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Performance

- Demander aux élèves d'expliquer le lien entre l'algorithme de la division et la division synthétique, en utilisant l'exemple $(2x^3 - x^2 - 13x - 6) \div (x + 2)$.

(RF10.1)

Papier et crayon

- Demander aux élèves d'écrire une solution incorrecte, mais plausible, pour la division $(x^4 - x^3 - 8x^2 + 8) \div (x + 2)$. Ils doivent ensuite échanger leur solution avec celle d'un partenaire et trouver les erreurs dans la solution.

(RF10.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

3.2 Le théorème du reste

MÉ: pp. 118-125

GE: pp. 67-70

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF10 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF10.2 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Encourager les élèves à examiner attentivement le polynôme lorsqu'ils préparent une division synthétique. Il faut inclure un zéro pour chaque terme manquant dans le dividende. Une erreur courante se produit dans des questions comme $\left(x^4 - 10x^2 + 2x + 3\right) \div \left(x - 3\right)$ lorsque les élèves ne comprennent pas le zéro pour le terme cubique manquant. Les élèves doivent vérifier le résultat en multipliant le quotient et le diviseur. Cela peut leur montrer si la division a été faite correctement.

RF10.3 *Expliquer la relation entre le reste d'une division d'un polynôme par x - a, a ∈ Z, et la valeur du polynôme quand x = a (théorème du reste).*

Les élèves doivent être initiés au théorème du reste, en vertu duquel si $(x - a)$ est un diviseur linéaire d'une fonction polynomiale $p(x)$, alors $p(a)$ correspond au reste. Initialement, il se peut que les élèves ne comprennent pas l'utilité de ce théorème, car ils peuvent obtenir des restes au moyen de la division synthétique. L'exposition à des polynômes comme $x^9 - 1$ ou $x^{100} + 1$ devrait les aider à voir que le théorème du reste est plus efficace dans certains cas.

RF10.4 *Expliquer et appliquer le théorème de factorisation pour exprimer un polynôme sous la forme d'un produit de facteurs.*

RF10.5 *Expliquer la relation entre les diviseurs (facteurs) linéaires d'un polynôme et les zéros de la fonction polynomiale correspondante.*

Le théorème du facteur, qui stipule qu'une fonction polynomiale $P(x)$, possède un facteur $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$, peut être utilisé pour déterminer les facteurs d'une expression polynomiale. Les élèves utilisent le théorème du zéro entier pour relier les facteurs d'un polynôme à ses termes constants. Les facteurs du terme constant révèlent les facteurs possibles du polynôme. Les élèves peuvent ensuite vérifier leur réponse à l'aide du théorème du facteur. Pour le polynôme $f\left(x\right) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, par exemple, les zéros entiers possibles sont les facteurs de 12. Rappelez aux élèves de tester à la fois les facteurs positifs et négatifs. Comme $f(2) = 0$, $f(-2) = 0$ et $f(3) = 0$, les facteurs du polynôme sont $(x - 2)$, $(x + 2)$ et $(x - 3)$. Cette méthode est limitée aux fonctions polynomiales dont les zéros sont des entiers différents.

Les élèves doivent travailler avec des fonctions polynomiales qui ont aussi des zéros non-entiers. Le théorème du facteur peut aussi être utilisé en conjonction avec la division synthétique pour factoriser un polynôme. Les élèves doivent utiliser le théorème du zéro entier pour déterminer les facteurs possibles et vérifier l'un facteur à l'aide du théorème du facteur. La division synthétique est ensuite appliquée, ce qui donne un polynôme qui doit être factorisé à son tour. Pour le polynôme $f\left(x\right) = 4x^3 - 12x^2 + 5x + 6$, $f(2) = 0$, l'utilisation de la division synthétique donne :

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{2} & 4 & -12 & 5 & 6 \\ & & 8 & -8 & -6 \\ \hline & 4 & -4 & -3 & \underline{|0} \end{array}$$

Il s'ensuit que $(x - 2)(4x^2 - 4x - 3)$, ce qui peut être décomposée en $(x - 2)(2x - 3)(2x + 1)$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation	Ressources et notes
Papier et crayon • Demander aux élèves de déterminer le reste de la fonction $f(x) = x^9 + 3x^4 - 5x + 1$ divisée par $x - 3$. (RF10.3) • Le volume d'un prisme triangulaire correspond à $V = x^3 + 18x^2 + 80x + 96$. Demander aux élèves de déterminer la ou les dimension(s) manquante(s) si deux des dimensions sont $(x + 2)$ et $(x + 12)$. Ils doivent identifier les restrictions applicables à la variable x. (RF10.4)	***Ressource autorisée*** *Mathématiques pré-calcul 12* 3.2 Le théorème du reste MÉ: pp. 118-125 GE: pp. 67-70
Entrevue • Demander aux élèves d'expliquer pourquoi le théorème du reste est un moyen efficace de trouver le reste quand une expression polynomiale est divisée par $x - a$. (RF10.3)	
Performance • Demander aux élèves d'expliquer comment déterminer le reste de $10x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 7x + 9$ divisé par $2x - 3$. (RF10.3) • Demander aux élèves d'expliquer et de démontrer, en utilisant le théorème du zéro entier, le théorème du facteur et la division synthétique, comment ils peuvent déterminer les valeurs de k qui font de $(x - k)$ un facteur de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$. (RF10.4, RF10.2) • Demander aux élèves de créer un polynôme de degré ≥ 3 à partir de facteurs linéaires. Ils devraient échanger avec les autres élèves et expliquer la relation entre les facteurs linéaires et les zéros correspondants de la fonction. (RF10.5)	3.3 Le théorème du facteur MÉ: pp. 126-135 GE: pp. 71-74

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF10 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF10.4, RF10.5 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent également être en mesure d'utiliser des méthodes alternatives pour factoriser des polynômes, comme le regroupement. Ils devraient avoir été initiés au regroupement lorsqu'ils ont factorisé des équations quadratiques par décomposition. Cette méthode peut être appliquée à des polynômes comme $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$
$$f(x) = x^2(x-3) - 4(x-3)$$
$$f(x) = (x-3)(x^2-4)$$
$$f(x) = (x-3)(x+2)(x-2)$$

Une fois qu'un polynôme a été factorisé, les élèves appliquent la propriété du produit zéro pour déterminer les zéros. Il s'agit d'un prolongement naturel du travail de résolution des équations quadratiques effectué dans le cours Mathématiques 2230.

RF11 Suite ...

Les élèves ont été initiés aux caractéristiques de base des graphiques des fonctions polynomiales de degré 2 ou supérieur au début de la présente unité. Ils utiliseront maintenant ces caractéristiques, de même que les coordonnées à l'origine, pour représenter graphiquement des polynômes de degré 5 ou moins.

RF11.4 *Expliquer la relation entre :*

- *les zéros d'une fonction polynomiale;*
- *les racines de l'équation polynomiale correspondante;*
- *les abscisses à l'origine du graphique de la fonction polynomiale.*

Les élèves ont été initiés aux zéros des fonctions quadratiques, aux racines de l'équation quadratique et aux abscisses à l'origine du graphique dans le cours Mathématiques 2230 (RF5). Il est important qu'ils fassent la distinction entre les termes zéros, racines et abscisses à l'origine, et qu'ils utilisent le terme approprié dans chaque situation. Les élèves peuvent être invités à trouver les racines de l'équation $3x^3 - 10x^2 - 23x - 10 = 0$, à trouver les zéros de la fonction $f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 23x - 10$, ou à déterminer les abscisses à l'origine du graphique de $f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 23x - 10$. Dans chaque cas, ils doivent identifier les facteurs du polynôme et résoudre les équations pour arriver à la solution $x = -1$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = 5$.

Les élèves doivent comprendre que le degré d'un polynôme indique le nombre maximum d'abscisses à l'origine de son graphique. Pour chaque abscisse à l'origine réelle, il y a un facteur linéaire et un zéro de la fonction polynomiale.

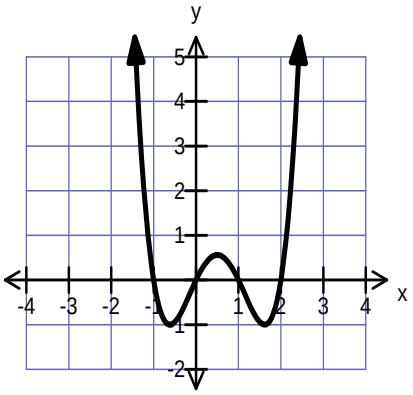
Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Étant donné l'équation et le graphique ci-dessous, demander aux élèves de déterminer les zéros, les racines et les abscisses à l'origine, et d'expliquer leur démarche.

  $f(x) = x(x - 1)(x + 1)(x - 2)$



(RF11.4)

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes pour le polynôme $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.
  - (i) Déterminer de manière algébrique ou graphique les facteurs linéaires de $f(x)$.
  - (ii) Expliquer la relation entre les facteurs linéaires et les éventuelles abscisses à l'origine.

(RF11.4, RF10.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

3.3 Le théorème du facteur

MÉ: pp. 126-135

GE: pp. 71-74

3.4 L'équation et le graphique de fonctions polynomiales

MÉ: pp. 136-152

GE: pp. 75-80

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

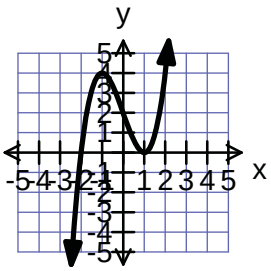
RF11 Suite ...

Indicateur de rendement:

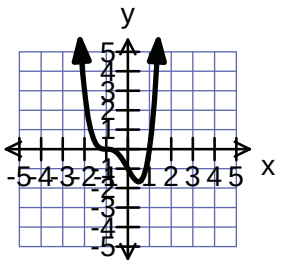
RF11.5 *Expliquer comment la multiplicité des zéros d'une fonction polynomiale influence la forme de son graphique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont résolu des polynômes pour trouver des zéros réels distincts qui correspondent à des abscisses à l'origine réelles distinctes. Ils doivent être conscients que les zéros ne seront pas toujours distincts. Certaines fonctions polynomiales peuvent avoir une multiplicité de zéros (c'est à dire des doubles, des triples, etc.), ce qu'on nomme aussi l'ordre d'un zéro. Les élèves devraient représenter graphiquement des polynômes comme $f(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$ ou $f(x) = (x + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 1)$ pour voir les effets de la multiplicité sur les racines.



$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$



$f(x) = (x + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 1)$

Demander aux élèves des questions comme :

- Qu'arriverait-il au graphique s'il existait un zéro de multiplicité 4?
- Quel serait l'effet de deux racines doubles sur le graphique?
- Quel effet aurait une racine triple sur le graphique? une racine double? une racine simple?

Les élèves doivent être encouragés à vérifier d'autres possibilités de multiplicité des zéros pour les polynômes de degré ≤ 5 et l'effet sur leurs graphiques respectifs.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

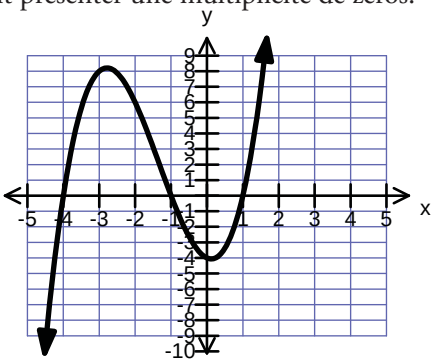
Entrevue

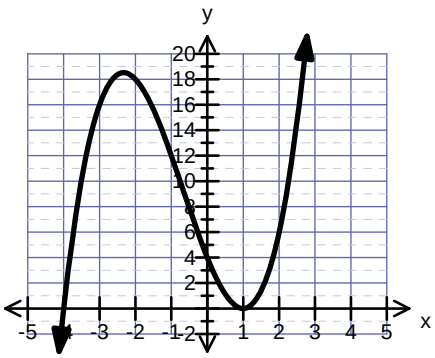
- Demander aux élèves d'expliquer, à l'aide d'un exemple, l'effet d'un zéro de multiplicité 5 sur le graphique d'un polynôme.

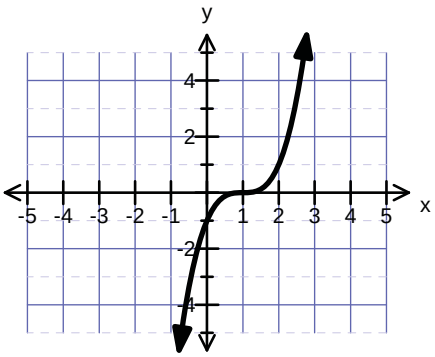
(RF11.5)

Performance

- Demander aux élèves d'examiner les graphiques suivants pour déterminer s'ils pourraient présenter une multiplicité de zéros.







À l'aide de l'activité *Réfléchir-Partager-Discuter*, donner aux élèves le temps de réfléchir aux similitudes et aux différences entre les graphiques en ce qui concerne la multiplicité des zéros. Les élèves se mettent alors en équipes de deux pour discuter de leurs idées. Après les discussions en équipe de deux, les élèves partagent leurs idées en petits groupes ou dans une discussion avec toute la classe.

(RF11.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée
Mathématiques pré-calcul 12

3.4 L'équation et le graphique de fonctions polynomiales

MÉ: pp. 136-152

GE: pp. 75-80

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF11 Suite ...

Indicateur de rendement:

RF11.6 *Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique d'une fonction polynomiale.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent comprendre que pour tracer le graphique de n'importe quel polynôme sans technologie graphique, ils doivent déterminer des points tels que les coordonnées à l'origine. Ils utilisent la valeur du coefficient dominant pour déterminer le comportement aux extrémités et déterminent la manière dont la multiplicité des zéros influence le graphique de la fonction.

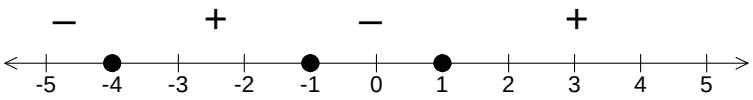
Les élèves doivent aussi être en mesure de déterminer quand la fonction est positive et quand elle est négative. Un tableau d'intervalles ou un schéma des signes constitué d'une droite numérique, des racines et de points d'essai peuvent leur faciliter la tâche. Ils doivent se rendre compte que la fonction n'est ni positive ni négative aux abscisses à l'origine. Les intervalles doivent être exprimés en notation ensembliste ou en notation par intervalle. Les élèves devraient connaître les deux types de notation grâce au cours Mathématiques 1231 (RF1).

Demander aux élèves de déterminer les intervalles où le graphique représenté par la fonction $f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)$ est positif ou négatif.

Ils peuvent utiliser un tableau pour déterminer les intervalles :

Intervalle	$x < -4$	$-4 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
Signe	–	+	–	+

Les droites de signes ont été introduites dans le cours Mathématiques 2230 lorsque les élèves traçaient des fonctions valeur absolue (RF2). En ce qui concerne le diagramme des signes à l'axe des x du graphique, les élèves peuvent remplacer une valeur de x de chaque intervalle dans la fonction pour déterminer quand la fonction est positive ou négative.



Rappeler aux élèves l'effet d'une multiplicité des zéros sur le graphique d'une fonction polynomiale. Discuter de la manière dont cela se reflèterait dans un diagramme de signes. Les élèves doivent comprendre que, pour un zéro de multiplicité impaire (par exemple, une seule racine ou une racine triple), le signe de la fonction change. Si une fonction a un zéro de multiplicité paire (par exemple, une racine double), le signe ne change pas.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Sans aide de la technologie graphique, les élèves peuvent tracer le graphique d'une fonction polynomiale comme $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$. Ils doivent voir des exemples où les abscisses à l'origine peuvent être déterminées par regroupement ou d'autres techniques de factorisation.

(RF11.6)

Observation

- Observer les élèves alors qu'ils tracent le graphique de $f(x) = -(x + 2)^3(x - 4)$ et le vérifient en utilisant la technologie graphique. Demandez-leur d'expliquer quelles caractéristiques du polynôme (par exemple, coordonnées à l'origine, multiplicité des zéros, coefficient dominant, intervalles positifs ou négatifs) les ont aidés à tracer le graphique.

(RF11.6)

Performance

- *Donne m'en cinq* est une activité qui offre aux élèves l'occasion de réfléchir individuellement et publiquement sur leur apprentissage. Demander aux élèves : Quelle a été la chose la plus importante que vous avez apprise sur la représentation graphique des fonctions polynomiales?

  Donner aux élèves un temps de réflexion avant de demander à cinq volontaires de partager leur réflexion. Les élèves peuvent aussi indiquer à main levée combien ont eu une pensée semblable chaque fois qu'un élève raconte sa réflexion.

(RF11.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

3.4 L'équation et le graphique de fonctions polynomiales

MÉ: pp. 136-152

GE: pp. 75-80

Note

MÉ: pp. 143-144

On ne s'attend pas à ce que les élèves utilisent des transformations pour tracer les graphiques des fonctions polynomiales.

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF11 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF11.7 *Résoudre un problème en modélisant une situation donnée comportant une fonction polynomiale.*

RF11.8 *Déterminer l'équation d'une fonction polynomiale état donné son graphique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont résolu des problèmes en déterminant et en analysant une équation quadratique (RF5). Ils appliqueront maintenant leurs connaissances aux fonctions polynomiales. Pour résoudre un problème, il est souvent nécessaire de simplifier le problème et de l'exprimer en langue ou en symboles mathématiques pour créer un modèle mathématique. Les élèves appliqueront les compétences acquises dans ce module pour résoudre des problèmes dans des contextes différents. Par exemple, ils devraient répondre à des questions sur la superficie, le volume et les nombres, comme :

- Trois entiers consécutifs ont un produit de −720. Quels sont les nombres entiers?

  Les élèves peuvent modéliser cette situation à l'aide d'une fonction polynomiale et résoudre l'équation pour déterminer les nombres entiers.

- Une boîte ouverte doit être construite à partir d'un morceau de carton de 10 po sur 12 po en coupant des carrés de x po de chaque coin et en repliant les côtés. Si le volume de la boîte est de 72 po^3, quelles sont ses dimensions?

  Il est nécessaire ici d'imposer des restrictions sur la variable indépendante. Demander aux élèves pourquoi, dans ce cas, la valeur de x est limitée à $0 < x < 5$.

Il est important pour les élèves de tenir compte de la possibilité que des racines soient non admissibles dans le contexte du problème. Ils doivent comprendre que le temps, la longueur, la largeur et la hauteur, par exemple, ne peuvent pas prendre des valeurs négatives.

Les élèves doivent également être capables d'analyser un graphique et de créer une équation polynomiale le modélisant. Ils devraient recevoir une variété de graphiques à racines distinctes et à racines multiples, et déterminer l'équation de la fonction polynomiale qui représente le graphique. Dans les cas où un graphique pourrait représenter un polynôme de degré 3 ou 5, ou un polynôme de degré 2 ou 4, le degré de l'équation résultante devrait être fourni aux élèves.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Performance

- Les élèves peuvent travailler en groupes de deux pour l'activité *Passe le problème*. Chaque groupe reçoit un problème pour lequel il faut modéliser une situation à l'aide d'une fonction polynomiale. Demander à un élève d'écrire la première ligne de la solution puis de la passer au deuxième élève. Le deuxième élève vérifie la démarche et la validité de la solution. S'il y a une erreur, les élèves devraient discuter de sa nature et de la raison pour laquelle elle a été commise. L'élève écrit ensuite la deuxième ligne de la solution et la passe à son partenaire. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que la solution soit complète.

Exemple de problème :

La longueur, la largeur et la hauteur d'une boîte rectangulaire, sont respectivement de x cm, $(x - 4)$ cm, et $(x + 5)$ cm. Trouver les dimensions de la boîte si le volume est de 132 cm^3.

(RF12.7)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

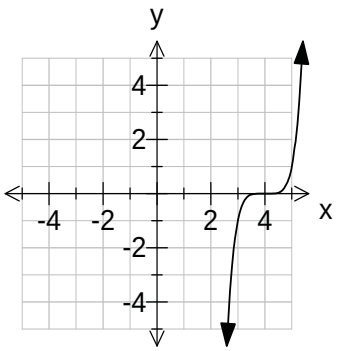
  i) Une boîte sans couvercle d'un volume de 900 cm^3 est faite d'un morceau de carton rectangulaire en coupant des carrés égaux des quatre coins et en repliant les côtés.

     a) Si les dimensions originales du carton sont de 30 cm sur 40 cm, trouvez la longueur des côtés du carré découpé de chaque coin.

     b) Calculer l'aire de la surface de la boîte.

  (ii) Le nombre réel et projeté, C (en millions), d'ordinateurs vendus dans une région entre 2010 et 2020 peut être modélisé par $C = 0{,}0092(t^3 + 8t^2 + 40t + 400)$ où $t = 0$ représente 2010. Dans quelle année est-ce que 8,51 millions d'ordinateurs devraient être vendus? (RF11.7)

- Demander aux élèves de modéliser la fonction polynomiale représentée par le graphique en tant que fonction cubique et en tant que fonction quintique.



(RF11.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

3.4 L'équation et le graphique de fonctions polynomiales

MÉ: pp. 136-152

GE: pp. 75-80

Les transformations de fonctions

Durée suggérée: 11 heures

Aperçu du module

Orientation et contexte

Le concept de fonction est l'une des idées mathématiques les plus importantes que les élèves auront à étudier. Les fonctions sont utilisées dans pratiquement toutes les branches des mathématiques parce qu'elles constituent un moyen efficace et puissant d'organiser et de gérer une variété de concepts et de relations mathématiques.

Dans ce module, les élèves verront quels effets les translations et les étirements horizontales et verticales et les réflexions sur l'axe des x, l'axe des y et la droite $y = x$ ont sur le graphique des fonctions générales et leurs équations. Dans d'autres unités, ils feront subir ces transformations à des fonctions particulières, y compris les fonctions racine, sinusoïdales, exponentielles et logarithmiques.

Les élèves seront aussi initiés aux réciproques. Ils devront reconnaître des relations réciproques et des fonctions réciproques et vérifier la réciprocité de deux fonctions.

Cadre des résultats d'apprentissage

RAG

Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

RAS RF1

Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives.

RAS RF2

Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives.

RAS RF4

Démontrer une compréhension des effets de réflexions (rabattements) sur les graphiques des fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions (rabattements) par rapport à:

- L'axe des x
- L'axe des y
- La droite y = x.

RAS RF3

Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives.

RAS RF5

Démontrer une compréhension des réciproques de relations.

Processus mathématiques

[C] Communication
[L] Liens
[RP] Résolution de problèmes
[V] Visualisation
[CE] Calcul mental et estimation
[R] Raisonnement
[T] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
Relations et Fonctions		
RF2. Démontrer une compréhension de relations et de fonctions. [C, R, V]	RF3. Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = a(x - p)^2 + q$, et determiner: • le sommet • le domaine et l'image • la direction de l'ouverture • l'axe de symétrie • les coordonnées à l'origine. [L, R, T, V] RF4. Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour identifier les caractéristiques du graphique correspondant, y compris: • le sommet • le domaine et l'image • la direction de l'ouverture • l'axe de symétrie • les coordonnés à l'origine pour résoudre des problèmes. [L, RP, R, T, V] RF11. Tracer le graphique et analyser des fonctions inverses (limités à l'inverse des fonctions linéaires et quadratiques). [L, R, T, V]	RF1. Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V] RF4. Démontrer une compréhension des effets de réflexions (rabattements) sur les graphiques des fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions (rabattements) par rapport à: • L'axe des x • L'axe des y • La droite y = x. [C, L, R, V] RF2. Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V] RF3. Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives. [C, L, R, V] RF5. Démontrer une compréhension des réciproques de relations. [C, L, R, V]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF1. Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives.

[C, L, R, V]

Indicateurs de rendement:

RF1.1 *Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y - k = f(x)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de k.*

RF1.2 *Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(x - h)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de h.*

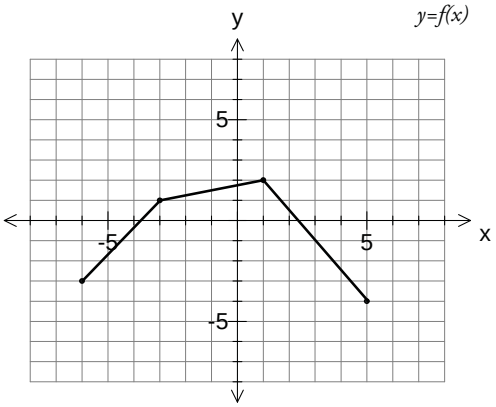
RF1.3 *Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y - k = f(x - h)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant aux effets de h et de k.*

RF1.4 *Esquisser le graphique de $y - k = f(x)$, de $y = f(x - h)$ ou de $y - k = f(x - h)$ pour des valeurs données de h et de k à partir d'une esquisse de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont été initiés aux fonctions quadratiques sous forme canonique $y = a(x - \mathrm{h})^2 + k$ (RF3). Ils ont appris que h et k déterminent les translations horizontale et verticale du graphique. Ces transformations permettent aux élèves d'identifier le sommet directement à partir de l'équation quadratique. Les élèves vont maintenant examiner l'effet de ces translations sur les fonctions générales et comparer la manière dont le graphique et la table de valeurs $y = f(x)$ compare à $y - k = f(x - \mathrm{h})$.

Les élèves doivent étudier l'effet d'une modification de la valeur de k en comparant les fonctions de la forme $y - k = f(x)$ ou $y = f(x) + k$ au graphique de $y = f(x)$. Fournir aux élèves un graphique de base, comme le graphique $y = f(x)$ ci-dessous:



Demander aux élèves d'identifier les points importants de $y = f(x)$ et de créer une table de valeurs. Ils devraient ensuite créer de nouvelles tables de valeurs et de nouveaux graphiques pour des fonctions comme $y + 3 = f(x)$, $y = f(x) + 2$, et $y - 1 = f(x)$, qui comportent une translation verticale k. Discuter avec les élèves de la manière dont cette translation verticale influence la position mais pas la forme ni l'orientation du graphique. Les élèves devraient ensuite utiliser la régle de correspondance $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$ pour décrire la translation verticale de chaque graphique.

De même, les élèves doivent ensuite étudier l'effet du paramètre h sur une fonction de forme $y = f(x - \mathrm{h})$, et appliquer la régle de correspondance $(x, y) \rightarrow (x + \mathrm{h}, y)$.

Les élèves auront aussi à travailler avec des fonctions qui ont subi à la fois une translation horizontale et une translation verticale par rapport à une fonction de base, et à généraliser ces transformations par une règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (x + \mathrm{h}, y + k)$. Ils devraient voir ces deux formes de la fonction transformée : $y - k = f(x - \mathrm{h})$ et $y = f(x - \mathrm{h}) + k$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Entrevue

- Demander aux élèves de décrire les similarités et les différences entre les graphiques des fonctions suivantes si elles représentent des transformations de la fonction de base $y = f(x)$:

  (i) $y - 10 = f(x)$
  (ii) $y = f(x + 7)$

(RF1.1, RF1.2)

- Demander aux élèves de décrire les translations de chaque fonction par rapport à $y = f(x)$:

  (i) $y = f(x - 2)$
  (ii) $y = f(x) - 9$
  (iii) $y = f(x + 3) - 7$
  (iv) $y - 12 = f(x + 4)$

(RF1.1, RF1.2, RF1.3)

Performance

- Fournir à chaque élève une feuille de papier quadrillé et un feuillet autoadhésif. Sur le papier quadrillé, demander aux élèves de construire une fonction constituée d'au moins quatre points. Sur le feuillet autoadhésif, ils doivent écrire une équation sous la forme $y - k = f(x)$ ou $y = f(x) + k$. Les élèves doivent échanger leurs feuillets autoadhésifs et appliquer la transformation inscrite sur le feuillet reçu à leur propre graphique.

(RF1.1)

Journal

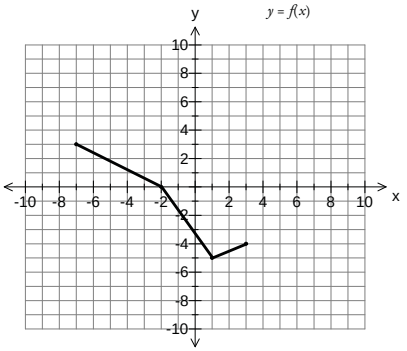
- Un ami demande de l'aide pour faire ses devoirs. Elle a une fonction et quatre points importants et elle veut représenter graphiquement $y = f(x + 5) - 7$. Demander aux élèves de décrire deux façons dont elle peut dessiner ce graphique.

(RF1.3, RF1.4)

Papier et crayon

- Étant donné le graphique de $y = f(x)$, demander aux élèves de créer une règle de correspondance et une table de valeurs pour chacune des transformations ci-dessous, puis de dessiner le graphique des fonctions transformées.

  (i) $y + 2 = f(x - 6)$
  (ii) $y = f(x + 2) + 5$
  (iii) $y = f(x - 4) - 7$



(RF1.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.1 Les translations horizontales et verticales

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 6-15

Guide d'enseignement (GE): pp. 8-12

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

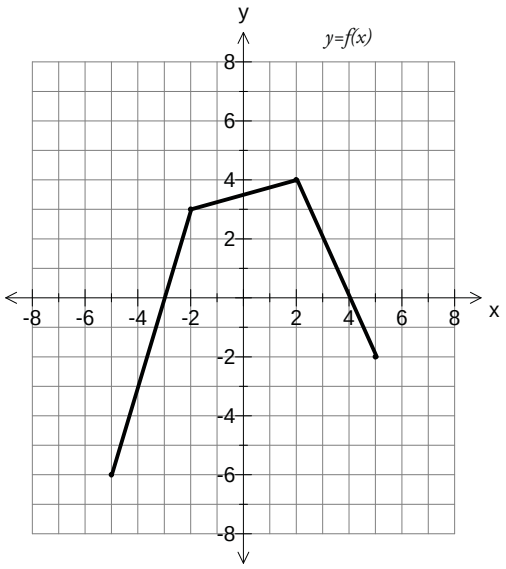
L'élève doit pouvoir:
RF1 Suite ...

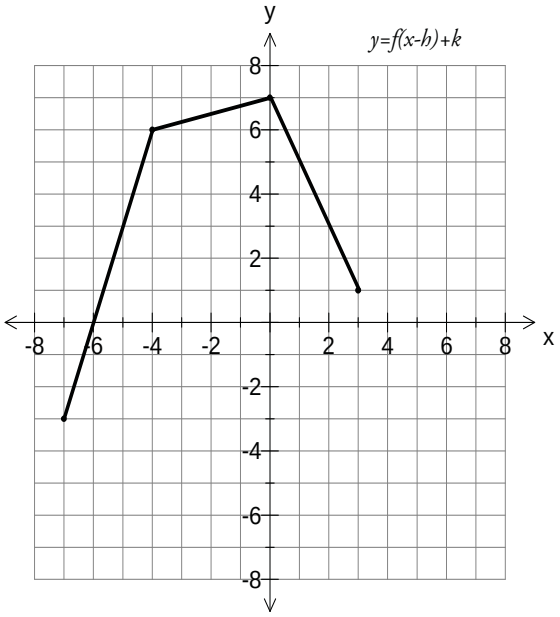
Indicateur de rendement:

RF1.5 *Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une translation verticale et/ou horizontale du graphique de la fonction y = f (x).*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Étant donné le graphique d'une fonction de base $y = f(x)$ et le graphique de $y - k = f(x - \mathrm{h})$, les élèves doivent déterminer les translations verticales et horizontales et écrire l'équation de la fonction transformée. À partir des deux graphiques ci-dessous les élèves pourraient être invités à décrire les translations verticales et horizontales. Ils devraient ensuite écrire l'équation de la fonction transformée sous la forme $y - 3 = f(x + 2)$ ou $y = f(x + 2) + 3$.





Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Performance

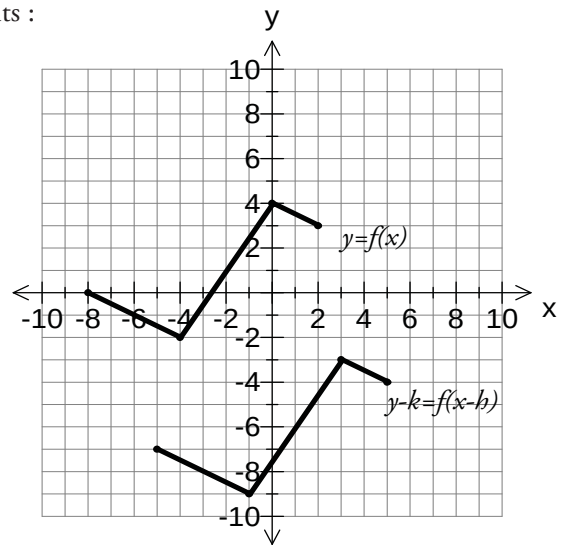
- Les élèves peuvent travailler en petits groupes pour cette activité. Fournir à chaque groupe une fonction de base $y = f(x)$ et demander à chaque élève de dessiner un graphique en faisant subir une translation à $y = f(x)$. Les membres de chaque groupe doivent ensuite échanger leurs graphiques et déterminer l'équation de la fonction de chaque graphique.

(RF1.5)

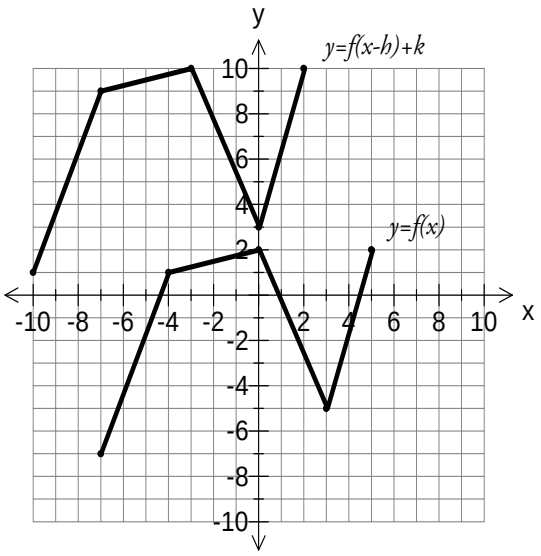
Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer les valeurs de h et de k et d'écrire l'équation du graphique transformé pour chacun des exemples suivants :

(i)



(ii)



(RF1.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.1 Les translations horizontales et verticales

MÉ: pp. 6-15

GE: pp. 8-12

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF4. Démontrer une compréhension des effets de réflexions (rabattements) sur les graphiques des fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions (rabattements) par rapport à:

- L'axe des x
- L'axe des y
- La droite y = x.

[C, L, R, V]

Indicateurs de rendement:

RF4.1 *Formuler la relation générale entre les coordonnées d'un point et celles du point obtenu par réflexion par rapport à l'axe des x ou l'axe des y.*

RF4.2 *Esquisser le résultat d'une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x ou l'axe des y, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.*

RF4.3 *Formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, et expliquer une règle générale relative à la réflexion (rabattement) du graphique d'une fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x ou l'axe des y.*

RF4.4 *Esquisser les graphiques des fonctions $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ et $x = -f(y)$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.*

RF4.5 *Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x ou l'axe des y.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

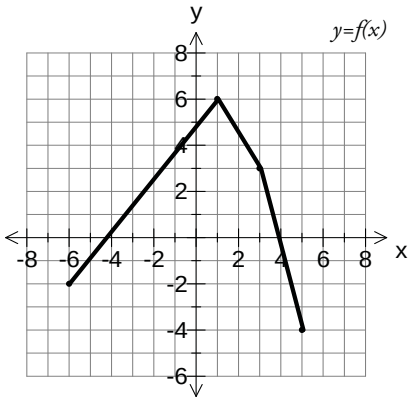
Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont vu des paraboles pour lesquelles l'axe de réflexion était l'axe des x (RF3). Ils vont maintenant travailler sur des fonctions comportant une réflexion à la fois sur l'axe des x et sur l'axe des y. Dans ce résultat, l'accent n'est pas mis sur la combinaison des réflexions et des translations, mais plutôt sur les réflexions dans l'axe horizontal ou vertical seulement. La réflexion d'un point par rapport à une droite $y = x$ sera abordée dans le cadre des fonctions réciproques.

Les élèves doivent étudier l'effet des réflexions par rapport à l'axe des x ou l'axe des y sur les coordonnées d'un point. Demandez-leur de tracer des points variés. Lorsqu'ils leur font subir une réflexion dans l'axe des x, ils doivent se rendre compte que la règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ s'applique. De même, ils devraient constater que la réflexion des points dans l'axe des y suit la règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (-x, y)$. Les élèves doivent ensuite esquisser la réflexion d'une fonction en considérant le graphique comme une série de points. Discuter avec eux de la manière dont les réflexions, comme les translations, ne changent pas la forme du graphique. Cependant, les réflexions peuvent changer l'orientation du graphique.

Il est important que les élèves reconnaissent les changements subis par l'équation de $f(x)$ lorsque surviennent des réflexions dans l'axe des x ou l'axe des y.

- $y = -f(x)$ produit une réflexion dans l'axe des x.
- $y = f(-x)$ produit une réflexion dans l'axe des y.

Étant donné le graphique d'une fonction $y = f(x)$, comme celui qui se trouve ci-dessous, les élèves doivent représenter graphiquement $y = -f(x)$ et $y = f(-x)$ en utilisant une règle de correspondance ou des transformations.



De même, à partir du graphique d'une fonction et d'un graphique réfléchi, ils doivent déterminer si l'équation du graphique réfléchi est de la forme $y = f(-x)$ ou $y = -f(x)$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Entrevue

- Demander aux élèves dans quel axe le premier point a été réfléchi pour obtenir le deuxième point :
  (i) (6, 7) et (−6, 7)
  (ii) (−2, −7) et (−2, 7)
  (iii) (5, 0) et (−5, 0)

  (RF4.1)

- Étant donné le graphique d'une fonction de base et un graphique réfléchi, demander aux élèves comment ils peuvent utiliser les points importants pour déterminer si le graphique a été réfléchi dans l'axe des x ou l'axe des y.

  (RF4.3)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer s'il est possible pour les coordonnées de rester les mêmes après qu'un point ait été réfléchi dans un axe.

  (RF4.1)

Performance

- Demander aux élèves de créer le graphique d'une fonction $y = f(x)$ en utilisant au moins quatre points importants. Ils doivent échanger leur graphique avec celui d'un partenaire et faire subir une réflexion à la fonction de base :
  (i) par rapport à l'axe des x
  (ii) par rapport à l'axe des y

  Demander aux élèves d'écrire l'équation de la nouvelle fonction.

  (RF4.2, RF4.4, RF4.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.2 Les réflexions et les étirements

MÉ: pp. 16-31

GE: pp. 13-18

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF2. Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives.

[C, L, R, V]

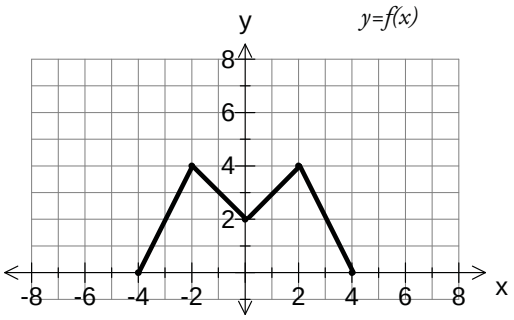
Indicateur de rendement:

RF2.1 *Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = af(x)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de a.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont étudié l'effet d'un étirement vertical sur les fonctions quadratiques (RF3). Ils aborderont maintenant l'effet des étirements verticaux et horizontaux sur les fonctions générales. Les élèves doivent décrire comment ces étirements modifient la forme du graphique et déterminer ces étirements à partir des graphiques de la fonction de base et de la fonction transformée. Ce résultat d'apprentissage met l'accent sur les étirements horizontaux et verticaux. Pour l'instant, les élèves ne devraient pas travailler sur des fonctions qui ont subi à la fois un étirement et une translation.

Les élèves doivent reconnaître l'effet de $|a|$ comme un étirement vertical de la fonction $y = f(x)$ sous la forme $y = af(x)$ ou $\frac{y}{a} = f(x)$.
On pourrait leur donner un graphique de la fonction $f(x)$ comme celui-ci.



À partir des points importants, demander aux élèves de générer la table de valeurs de $y = 2f(x)$ et $y = \frac{1}{2}f(x)$.

Les élèves doivent se rendre compte que a modifie la forme de la fonction en étirant le graphique verticalement. Ils devraient comparer les points importants de la fonction originale aux points de la fonction transformée pour trouver la règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (x, ay)$.

Lorsqu'ils créent la table de valeurs et le graphique de la fonction transformée, les élèves pourraient remarquer que certains points ne changent pas, même après un étirement vertical. Les points qui ne changent pas après une transformation sont appelés points invariants. Les élèves ont été initiés à ces points dans le cours Mathématiques 2230 lorsqu'ils ont travaillé sur les fonctions réciproques (RF11).

Les élèves doivent aussi travailler avec des valeurs négatives de a. Ils devraient remarquer qu'une valeur négative de a provoque une réflexion dans l'axe des x et que l'étirement vertical est positif, c'est à dire que l'étirement vertical correspond à $|a|$. Les élèves doivent comparer les relations où $|a| > 1$ et celles où $|a| < 1$ pour voir l'influence de ces valeurs sur le graphique.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

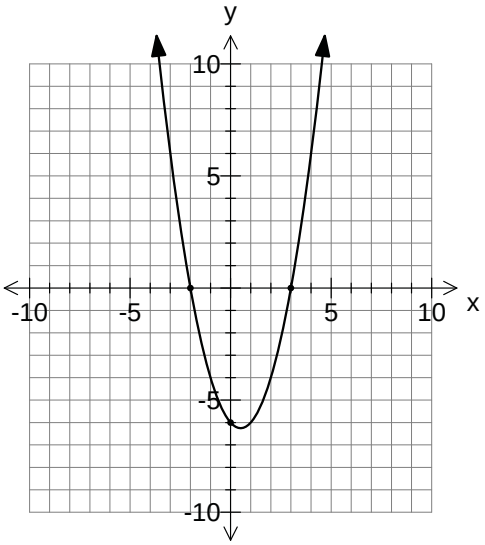
Entrevue

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi le facteur d'étirement vertical de la fonction $y = af(x)$ est déterminé en fonction de $|a|$. Les questions suivantes pourraient être posées pour approfondir la réflexion : « Est-il possible d'avoir un facteur d'étirement vertical négatif? Si les étirements sont toujours positifs, quel est l'effet d'une valeur négative de a sur le graphique? »

(RF2.1, RF4.1, RF4.2, RF4.3)

Journal

- Étant donné le graphique de la fonction ci-dessous, demander aux élèves d'expliquer quels points sont des points invariants et pourquoi ils ne sont pas affectés par un étirement vertical.



(RF2.1)

- Demander aux élèves d'expliquer l'effet sur le graphique d'une fonction quand $|a| > 1$ ou $|a| < 1$.

(RF2.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.2 Les réflexions et les étirements

MÉ: pp. 16-31

GE: pp. 13-18

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

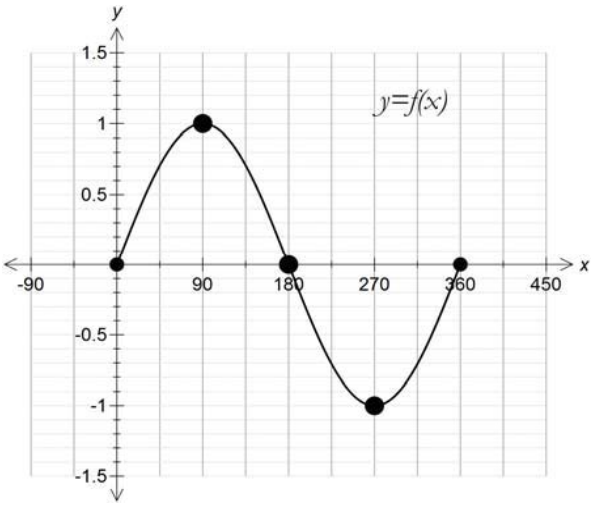
RF2 Suite ...

Indicateur de rendement:

RF2.2 *Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(bx)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif une règle générale, quant à l'effet de b.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves verront pour la première fois la notion d'étirement horizontal. La technologie graphique pourrait être utilisée pour afficher une fonction de base comme $y = sin(x)$, avec un domaine restreint de [0°, 360°]. Les élèves n'ont pas à connaître l'équation de la fonction de base.



Ayant donné aux élèves les graphiques de $y = f(3x)$ et $y=f(\frac{1}{2}x)$ ils peuvent examiner l'effet sur le graphique et la table de valeurs. Les élèves devraient discuter de l'effet général d'un étirement horizontal sur le graphique de la fonction de base et sur la table de valeurs. La règle de correspondance $(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{b}x, y\right)$ pour passer de la fonction de base à la fonction transformée peut être déduite de l'exemple. Les élèves doivent comparer des relations où $|b| < 1$ et des relations où $|b| > 1$. Ils devraient aussi remarquer que si $b < 0$, le graphique sera étiré et subira une réflexion dans l'axe des *y*. Comme pour les étirements verticaux, les étirements horizontaux sont toujours positifs.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

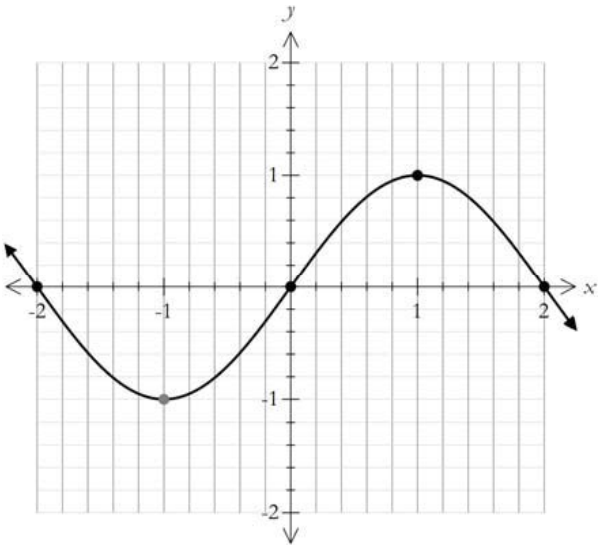
Entrevue

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi la fonction $y = f(bx)$ montre un étirement horizontal par un facteur de $\frac{1}{|b|}$.

(RF2.2)

Journal

- Étant donné le graphique de la fonction ci-dessous, demander aux élèves d'expliquer quels points sont invariants et pourquoi ils ne sont pas affectés par un étirement horizontal.



(RF2.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.2 Les réflexions et les étirements

MÉ: pp. 16-31

GE: pp. 13-18

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

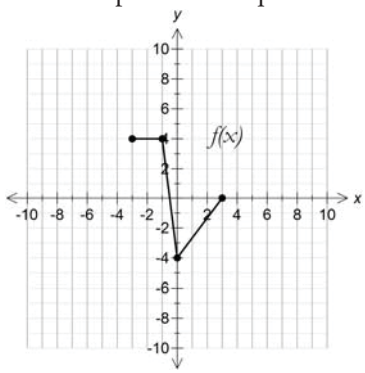
L'élève doit pouvoir:
RF2 Suite ...

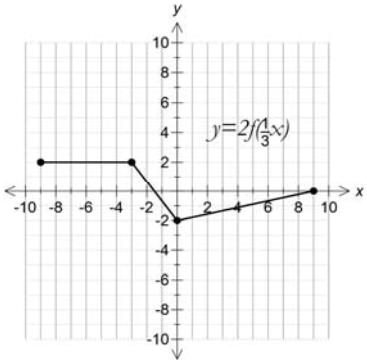
Indicateur de rendement:

RF2.3 *Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = af(bx)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant aux effets de a et de b.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent aussi travailler avec des fonctions qui comportent à la fois un étirement vertical et horizontal. En comparant deux graphiques, ils doivent être en mesure de déterminer les effets des valeurs a et b sur le graphique de $y = af(bx)$ par rapport à celui de $y = f(x)$. Par exemple, étant donné les deux graphiques ci-dessous, les élèves pourraient être invités à répondre aux questions suivantes :





- Quel a été l'effet du 2 sur le graphique?
- Quel a été l'effet du 2 sur la table de valeurs?
- Quel a été l'effet du $\frac{1}{3}$ sur le graphique?
- Quel a été l'effet du $\frac{1}{3}$ sur la table de valeurs?

Les élèves doivent ensuite déterminer une règle de cosrrespondance générale pour les fonctions comportant un étirement vertical $|a|$ et un étirement horizontal $\frac{1}{|b|}$ comme $(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{b}, ay\right)$.
Les travaux sur les étirements verticaux et horizontaux devraient porter sur des fonctions des bornées.

Des fonctions non bornées comme $y = x^2$ et $y = |x|$ pourraient être présentées aux élèves pour leur permettre de se familiariser avec les étirements verticaux et horizontaux de ces fonctions. Pour la plupart des fonctions non bornées avec lesquelles les élèves ont déjà travaillé, les étirements peuvent être décrits soit comme un étirement horizontal ou un étirement vertical. Avec une fonction comme $y = 4x^2$, qui comporte un étirement vertical de quatre, les élèves peuvent comparer l'effet d'un étirement vertical et celui d'un étirement horizontal. Si cette fonction est écrite sous la forme $y = (2x)^2$, elle comporte un étirement horizontal de $\frac{1}{2}$. Encourager les élèves à créer une règle de correspondance pour les deux fonctions et à créer une table de valeurs et un graphique pour la fonction de base $y = x^2$ de manière à vérifier que les étirements ont le même effet.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Performance

- À l'aide de la technologie, demander aux élèves de démontrer les effets de l'étirement sur une photo pour une variété de valeurs et de combinaisons de *a* et de *b*.

(RF2.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.2 Les réflexions et les étirements

MÉ: pp. 16-31

GE: pp. 13-18

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF2 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF2.4 *Esquisser le graphique de $y = af(x)$, de $y = f(bx)$ ou de $y = af(bx)$ pour des valeurs données de a et de b à partir d'une esquisse de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.*

RF2.5 *Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction étant donné le graphique représentant un étirement vertical et/ou horizontal du graphique de la fonction $y = f(x)$.*

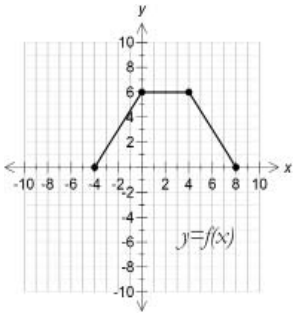
Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

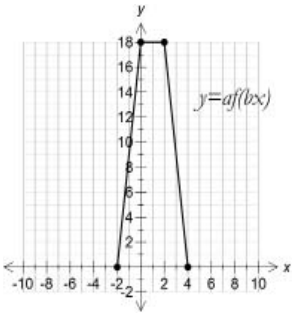
Étant donné le graphique d'une fonction, les élèves doivent appliquer un étirement horizontal ou un étirement vertical pour produire le graphique de la fonction transformée $y = af(bx)$. Les deux moyens de produire le graphique consistent à :

- déterminer les points importants et utiliser une règle de correspondance pour créer une nouvelle table de valeurs
- utiliser les connaissances des étirements pour transformer le graphique directement.

Étant donné le graphique d'une fonction transformée et celui d'une fonction de base avec lequel le comparer, les élèves doivent déterminer l'étirement horizontal et l'étirement vertical, puis écrire l'équation de la fonction transformée sous la forme $y = af(bx)$ ou $\frac{y}{a} = f(bx)$. L'objectif de ce résultat d'apprentissage n'est pas de déterminer l'équation précise de la fonction de base ou de la fonction transformée comme $\frac{y}{7} = |4x|$, mais de travailler avec des équations générales comme $\frac{y}{7} = f(4x)$.

Les étirements peuvent être déterminés en comparant le domaine et l'image des fonctions. Les élèves devraient travailler avec des graphiques comme les suivants :





Le domaine de $y = f(x)$ est $[-4, 8]$, qui couvre un intervalle de 12 unités. Le domaine de $y = af(bx)$ est $[-2, 4]$, qui couvre un intervalle de 6 unités. Les élèves doivent comprendre que l'étirement horizontal est $\frac{1}{2}$ ce qui signifie que $|b| = 2$.

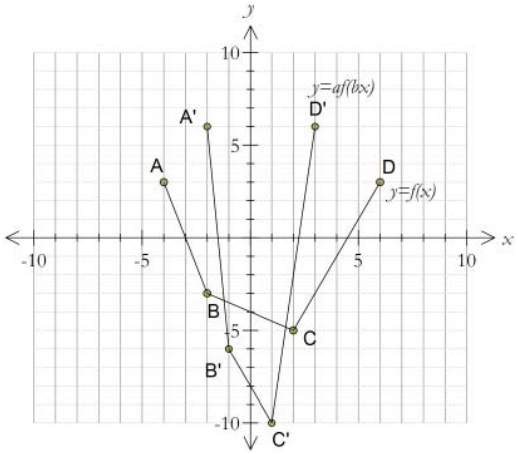
De même, l'image de $y = f(x)$ est $[0, 6]$, qui couvre un intervalle de 6 unités, et l'image de $y = af(bx)$ est $[0, 18]$, qui couvre un intervalle de 18 unités. Les élèves doivent comprendre que l'étirement vertical est 3, ce qui signifie que $|a| = 3$. Comme il n'y a pas de réflexion, ils peuvent conclure que l'équation du graphique transformé est $y = 3f(2x)$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves d'écrire l'équation générale, sous la forme $f(x)$ pour le diagramme étiré montré sur le même ensemble d'axes, en déterminant les valeurs a et b à partir du graphique.



(RF2.5)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer quand les abscisses à l'origine restent invariantes après un étirement, et quand les ordonnées à l'origine restent invariantes après un étirement. Ils pourraient également décrire les circonstances dans lesquelles un point est invariant pour les deux types d'étirements.

(RF2.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.2 Les réflexions et les étirements

MÉ: pp. 16-31

GE: pp. 13-18

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF3 Appliquer des translations et des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives.

[C, L, R, V]

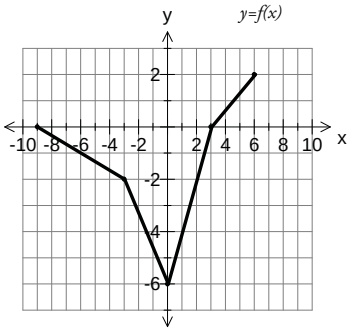
Indicateur de rendement:

RF3.1 *Esquisser le graphique de la fonction $y - k = af(b(x - h))$ pour des valeurs données de a, b, h et k, à partir du graphique donné de la fonction $y = f(x)$, où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont travaillé avec des translations, des réflexions dans l'axe des x et l'axe des y et des étirements. Pour la plupart, ces transformations ont été abordées indépendamment les unes des autres. Les élèves travailleront maintenant sur des fonctions et des graphiques comportant tous les types de transformations.

Étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$, les élèves doivent représenter graphiquement la fonction $y - k = af(b(x - \mathrm{h}))$ pour différentes valeurs de a, b, h, et k. Le graphique peut être créé en utilisant des transformations. À partir du graphique d'une fonction, comme $y = f(x)$ illustrée ici, demander aux élèves de représenter graphiquement une fonction transformée comme $y = -2f\left(3\left(x-1\right)\right)+4$.



Rappeler aux élèves l'importance de l'ordre des opérations. Comme les étirements et les réflexions sont produits par multiplication et que les translations sont produites par addition, les étirements et les réflexions sont appliqués en premier. Les élèves doivent appliquer les transformations suivantes à chaque point pour produire le graphique transformé :

- étirement horizontal de $\frac{1}{3}$
- étirement vertical de 2
- réflexion dans l'axe des x
- translation horizontale de 1 unité vers la droite
- translation verticale de 4 unités vers le haut

Les élèves doivent se rendre compte que les étirements et les réflexions peuvent être appliquées dans n'importe quel ordre, tant que ce n'est pas avant les translations. De même, l'ordre dans lequel les translations sont appliquées n'est pas important, tant qu'elles le sont après les étirements et les réflexions.

Les élèves peuvent également générer une table de valeurs à partir des points importants, et la règle de correspondance $\left(x, y\right) \rightarrow \left(\frac{1}{3}x+1, -2y+4\right)$ pour générer une nouvelle table de valeurs.

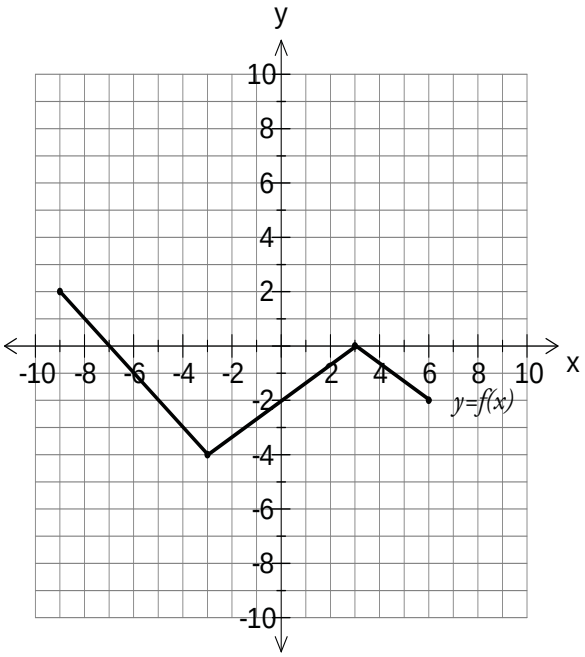
Il est parfois nécessaire de réécrire une fonction avant de pouvoir la représenter graphiquement. Avant de représenter $y - 6 = 3f(4x - 8)$, par exemple, les élèves doivent écrire la fonction sous la forme $y - 6 = 3f(4(x - 2))$. Cela les aidera à voir que la valeur de h est 2, et non 8.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ ci-dessous, demander aux élèves d'esquisser le graphique de $y = 2f(-3(x+1)) - 2$.



(RF3.1)

Journal

- Demander aux élèves de décrire les étapes de la représentation graphique d'une fonction de forme $y = af(b(x - h)) + k$, dans un cas où la forme du graphique de $f(x)$ est bien connue.

(RF3.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.3 Combiner des transformations

MÉ: pp. 32-43

GE: pp. 19-24

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

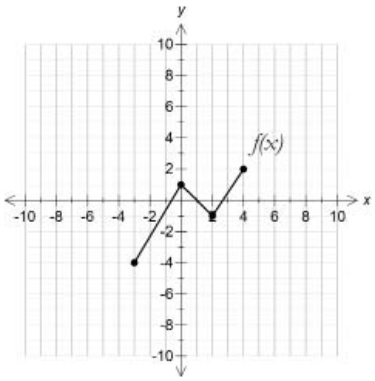
L'élève doit pouvoir:
RF3 Suite ...

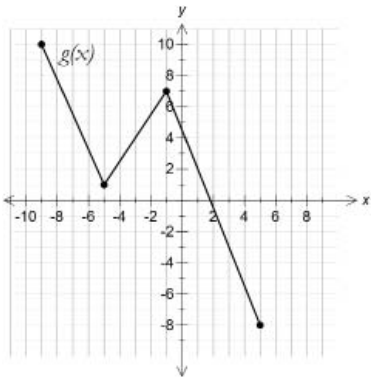
Indicateur de rendement:

RF3.2 *Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction à partir du graphique représentant une translation et/ou un étirement du graphique de la fonction* $y = f(x)$.

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent comparer le graphique d'une fonction de base avec le graphique d'une fonction transformée, déterminer toutes les transformations et donner l'équation de la fonction transformée. L'accent devrait être mis sur les fonctions dont le domaine et l'image sont limités. Dans un exemple comme le suivant, les élèves doivent trouver l'équation de *g(x)*, une transformation de *f (x)* :





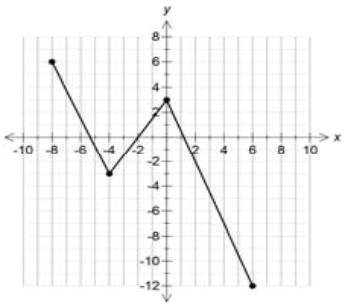
Les remarques suivantes pourraient être utilisées pour lancer une discussion :

- Quel est le domaine de chaque fonction? En quoi est-il utile de le savoir pour déterminer l'étirement horizontal?

  Les élèves doivent se rendre compte que le domaine de *f(x)* est $[-3, 4]$ ce qui couvre un intervalle de 7 unités, et que le domaine de $g(x)$ est $[-9, 5]$ ce qui couvre un intervalle de 14 unités. Par conséquent, $g(x)$ résulte d'un étirement horizontal d'une valeur de 2.
- Quel est l'image de chaque fonction? En quoi est-il utile de le savoir pour déterminer l'etirement vertical?

  En comparant les images de la même façon, les élèves devraient se rendre compte que l'étirement vertical est d'une valeur de 3.
- Est-ce que le graphique a été réfléchi dans l'axe des *y*? Expliquez votre raisonnement.

Les élèves devraient conclure que $a = 3$ et $b = -\frac{1}{2}$. L'application de ces transformations à *f(x)* produit le graphique suivant :



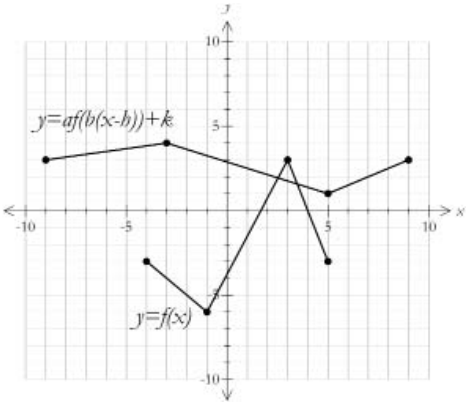
Quand les élèves comparent les points importants, ils doivent se rendre compte que le graphique doit être déplacé de 1 unité vers la gauche et de 4 unités vers le haut pour donner *g(x)*, ce qui donne la fonction $y = 3f\left(-\frac{1}{2}(x+1)\right) + 4$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- À l'aide d'un graphique comme celui qui est illustré, demander aux élèves de déterminer l'équation spécifique du graphique *y = f(x)* sous la forme $y = af(b(x-h)) + k$.



(RF3.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.3 Combiner des transformations

MÉ: pp. 32-43

GE: pp. 19-24

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF5 Demonstrate an understanding of inverses of relations.

[C, CN, R, V]

RF4 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF4.6 *Formuler la relation générale entre les coordonnées d'un point et celles du point obtenu par réflexion par rapport à la droite y = x.*

RF5.1 *Expliquer comment la transformation (x, y) → (y, x) peut être utilisée pour esquisser la réciproque d'une relation.*

RF5.2 *Expliquer la relation entre les domaines et les images d'une relation et de sa réciproque.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Quand les élèves commenceront à travailler avec des réciproques, ils étudieront la relation entre le graphique d'une relation et sa réciproque, et ils détermineront si une relation et sa réciproque sont des fonctions. Les élèves produiront le graphique d'une réciproque à partir du graphique de la relation originale, limiteront le domaine d'une fonction pour faire en sorte que sa réciproque soit aussi une fonction et détermineront l'équation de f^{-1} à partir de l'équation f.

Discuter avec les élèves de la façon dont une réciproque « annule » ce que fait la relation originale. L'utilisation d'exemples de situations non mathématiques peut aider à comprendre un sujet qui est autrement très abstrait. La réciproque de l'ouverture d'une porte et la fermeture d'une porte; la réciproque de l'emballage d'un cadeau consiste à le déballer. Sur le plan mathématique, les élèves devraient concevoir les réciproques comme le fait de renverser toutes les opérations mathématiques. Le tableau suivant permet d'illustrer ce concept :

Fonction	Réciproque
$f(x) = x + 2$	$f^{-1}(x) = x - 2$
$f(x) = 5x$	$f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Les élèves doivent comparer une fonction à sa réciproque à l'aide d'une table de valeurs. L'examen de la table de valeurs de $y = x + 4$ et de son inverse, $y = x - 4$, montre que les valeurs x et y sont interverties.

x	y
−2	2
−1	3
0	4
1	5
2	6

x	y
2	−2
3	−1
4	0
5	1
6	2

Sur cette base, les élèves devraient considérer la notation de correspondance $(x, y) \rightarrow (y, x)$ comme une inversion des valeurs x et y ayant pour but d'annuler un processus. Les nombres entrés dans une fonction sont produits par sa réciproque, et vice versa. C'est ce qui explique la relation entre les domaines et les images d'une relation et de sa réciproque. Les élèves peuvent avoir de la difficulté à généraliser cette relation dans le cas des fonctions linéaires, comme leur domaine et leur image englobent tous les nombres réels. Utiliser le graphique d'une fonction quadratique, comme $y = (x-2)^2 + 1$, et le graphique de sa réciproque, pour mettre la relation en évidence. Le domaine de la fonction d'origine englobe tous les nombres réels et son image est $\{y \mid y \geq 1, y \in R\}$. Ils doivent remarquer que le domaine et l'image sont inversés dans la réciproque.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Les élèves répondent à trois questions de réflexion qui décrivent ce qu'ils ont appris sur les réciproques.

  Exemple d'une feuille de réflexion 3-2-1 :

3 nouvelles choses que j'ai apprises

1.
2.
3.

2 choses sur lesquelles je dois encore travailler

1.
2.

1 chose qui me sera utile demain

1.

Fournir aux élèves une copie de la feuille de réflexion et leur donner du temps pour la remplir. Ils pourraient aussi se mettre en équipes de deux pour discuter de leurs réflexions 3-2-1.

(RF4.6, RF5.1, RF5.2, RF5.3)

- Demander aux élèves d'expliquer ce que signifie en théorie le fait qu'une fonction soit la réciproque d'une autre, en ce qui concerne leur domaine et leur image.

(RF5.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.4 La réciproque d'une relation

MÉ: pp. 44-55

GE: pp. 25-30

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF4 Suite ...

RF5 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF5.3 *Expliquer comment le graphique de la droite $y = x$ peut être utilisé pour esquisser la réciproque d'une relation.*

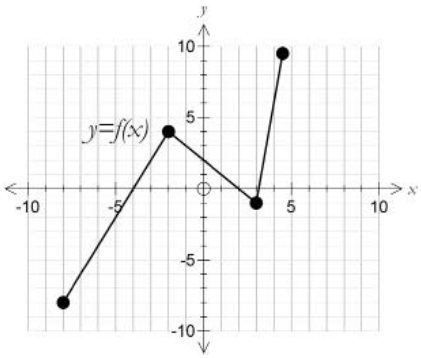
RF5.4 *Esquisser, à partir du graphique de la relation, le graphique de sa réciproque.*

RF4.7 *Esquisser le résultat d'une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.*

RF4.8 *Formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, et expliquer une règle générale relative à la réflexion (rabattement) du graphique d'une fonction $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

En utilisant la méthode $(x, y) \rightarrow (y, x)$ pour créer une table de valeurs de la réciproque d'une fonction, les élèves devraient rapidement se rendre compte que les graphiques de f and f^{-1} sont la réflexion l'un de l'autre lorsqu'ils sont dessinés sur les mêmes axes. L'axe de symétrie devient évident s'ils dessinent la droite $y = x$. Un graphique comme le suivant pourrait être utilisé à titre d'exemple :



À partir du graphique, demander aux élèves de faire ce qui suit :

- Créer une table de valeurs pour la fonction en utilisant les paires ordonnées des quatre points importants fournis.
- Transformer la table en appliquant la règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (y, x)$.
- Dessiner le graphique de la relation qui correspond à la nouvelle table.
- Chercher une relation entre le graphique de f et celui de f^{-1}.
- Généraliser la regularité à la relation entre les graphiques des fonctions et de leur réciproque.

Après avoir vu la relation graphique entre une relation et sa réciproque, les élèves doivent apprendre à produire le graphique de la réciproque d'une fonction sur les mêmes axes sans passer par la production de tables de valeurs.

Il convient de noter qu'une erreur est fréquemment commise avec la notation des fonctions réciproques. Il se pourrait que les élèves écrivent erronément $f^{-1}(x)$ comme $\frac{1}{f(x)}$.

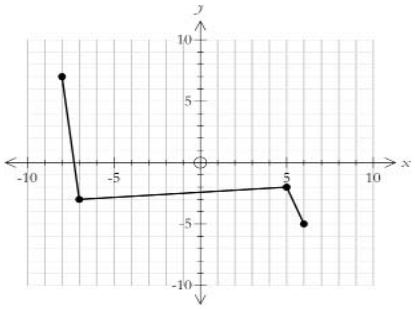
Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

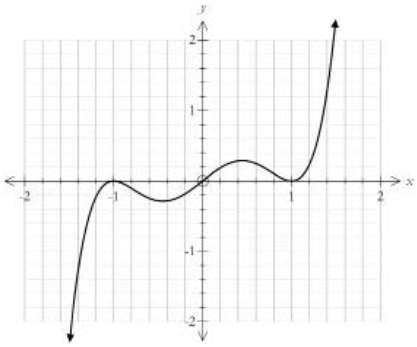
Papier et crayon

- Pour chacun des graphiques ci-dessous, demander aux élèves d'esquisser la relation réciproque sur les mêmes axes.

(i)



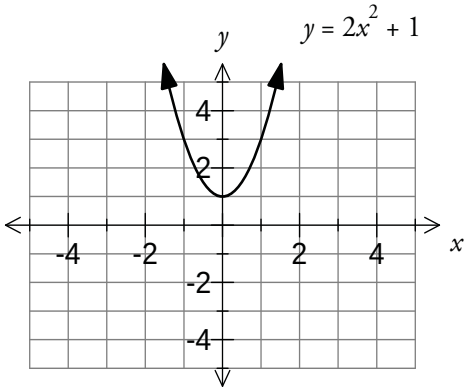
(ii)



(RF5.4)

Journal

- Les élèves devraient discuter de la manière dont ils pourraient esquisser le graphique de la réciproque de la relation représentée ci-dessous, en utilisant les deux approches indiquées :
  - (i) la droite $y = x$
  - (ii) la règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (y, x)$



(RF5.1, RF5.3, RF4.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.4 La réciproque d'une relation

MÉ: pp. 44-55

GE: pp. 25-30

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF5 Suite ...

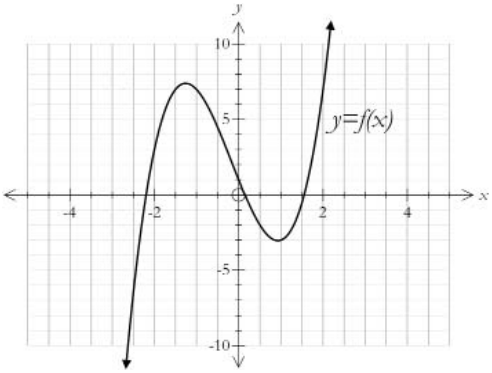
Indicateur de rendement:

RF5.5 *Déterminer si une relation et sa réciproque sont des fonctions.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 1231, les élèves ont appris à faire la différence entre une fonction et une relation (RF2). Ils ont également utilisé le test de la droite verticale pour déterminer si une relation est aussi une fonction. Ce contenu pourrait être revu rapidement pour lancer discussion visant à déterminer si la réciproque d'une fonction est elle aussi une fonction.

On pourrait donner aux élèves des graphiques comme les suivants et leur demander de faire ce qui suit.



- Utiliser un test de la droite verticale pour déterminer si $y = f(x)$ est une fonction.
- Construire le graphique de $y = f^{-1}(x)$ par réflexion du graphique de $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.
- Utiliser le test de la droite verticale pour déterminer si $y = f^{-1}(x)$ est une fonction.
- Quel genre de test de droite peut être utilisé avec le graphique de $y = f(x)$ pour déterminer si sa réciproque serait une fonction?

Les élèves devraient se rendre compte que c'est le test de la droite horizontale qui est utilisé pour déterminer si une relation réciproque est une fonction.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Journal

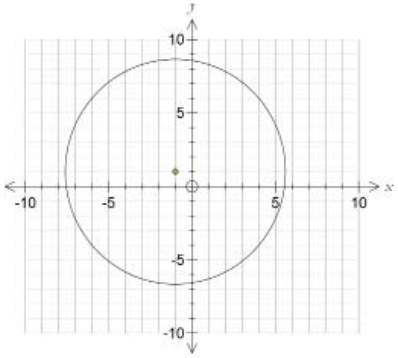
- Demander aux élèves d'expliquer la différence entre un test de la droite verticale et un test de la droite horizontale selon ce que chacun sert à déterminer, et la raison pour laquelle ils fonctionnent.

(RF5.5)

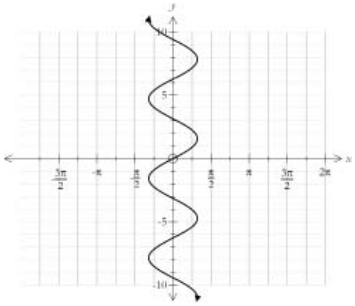
Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer si la réciproque de chaque relation représentée ci dessous est une fonction, sans la dessiner.

(i)



(ii)



(RF5.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.4 La réciproque d'une relation

MÉ: pp. 44-55

GE: pp. 25-30

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF4 Suite...

RF5 Suite...

Indicateurs de rendement:

RF5.6 *Déterminer les restrictions qui doivent être apportées au domaine d'une fonction pour que sa réciproque soit une fonction.*

RF5.7 *Déterminer l'équation et esquisser le graphique de la réciproque étant donné l'équation d'une relation linéaire ou quadratique.*

RF4.9 *Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.*

RF5.8 *Déterminer, algébriquement ou graphiquement, si deux fonctions sont des réciproques l'une de l'autre.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent restreindre le domaine des fonctions pour s'assurer que la réciproque est aussi une fonction. Les exemples devraient être limités à des fonctions linéaires et quadratiques. Les élèves doivent comprendre que les seules fonctions linéaires dont la réciproque n'est pas une fonction sont celles dont le graphique est une droite horizontale.

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont converti les équations de fonctions quadratiques de forme standard, $y = ax^2 + bx + c$, à la forme canonique, $y = a(x - \mathrm{h})^2 + k$, par complétion du carré (RF4). Ils ont aussi dessiné le graphique de fonctions quadratiques sous forme canonique (RF3). Les élèves continueront de convertir des équations quadratiques d'une forme à l'autre pour déterminer le sommet de la fonction et en limiter le domaine. Les élèves pourraient être guidés dans le processus ci-dessous pour la fonction quadratique représentée par $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$:

- Écrire l'équation sous forme canonique et dessiner son graphique.
- Utiliser le graphique de la fonction quadratique pour dessiner le graphique de sa réciproque sur les mêmes axes.
- Déterminer si la relation réciproque est aussi une fonction. Sinon, demandez-vous ce qui aurait à changer dans le graphique de la fonction quadratique originale pour que sa réciproque soit une fonction.
- Restreindre le domaine de la fonction $y = f(x)$ pour faire en sorte que $y = f^{-1}(x)$ soit aussi une fonction.

Le fait de restreindre le domaine d'une parabole pour que $x > \mathrm{h}$ produit une fonction dont la réciproque est aussi une fonction. Le fait de restreindre le domaine pour que $x < \mathrm{h}$ fonctionne aussi, mais n'est pas aussi souvent utilisé.

Les élèves devraient ensuite voir le processus par lequel l'interversion des variables x et y dans l'équation et leur réarrangement pour isoler y donne l'équation $y = f^{-1}(x)$.

Lorsqu'on leur présente deux fonctions, les élèves doivent déterminer si l'une est la réciproque de l'autre. Pour ce faire, ils peuvent dessiner un graphique des deux fonctions et tracer la droite $y = x$ pour voir si les fonctions sont des réflexions l'une de l'autre.

Algébriquement, l'équation de chaque fonction devrait être fournie aux élèves. Ils doivent déterminer l'équation de la réciproque d'une des fonctions données, et déterminer s'il s'agit d'une fonction équivalente à l'autre fonction donnée.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations similaires.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer l'équation de la réciproque pour chacune des relations suivantes :

  (i) $y = 5x$
  (ii) $y = 3x - 4$
  (iii) $y = -2x + 5$

  (RF5.7)

- Demander aux élèves d'indiquer le domaine restreint pour faire en sorte que la réciproque de chacune des relations suivantes soit une fonction, et d'écrire l'équation de la réciproque :

  (i) $y = x^2 - 6x + 10$
  (ii) $y = 5x^2 + 20x - 9$
  (iii) $y = 2x^2 - 8x + 1$

  (RF5.6, RF5.7)

- Demander aux élèves de déterminer si les réciproques des fonctions suivantes sont des fonctions. Si la réciproque n'est pas une fonction, ils doivent décrire comment elles peuvent être modifiées pour le devenir.

  (i) $f(x) = 3x^2$

  (ii) $f(x) = x^2 + 2x$

  (iii) $f(x) = 2x^2 + 4$

  (RF5.5, RF5.6)

- Les élèves doivent relier chacune des équations de la première liste avec sa réciproque dans la deuxième liste :

Fonction	Réciproque
$y = 4x - 1$	$y = \frac{x-16}{4}$
$y = x^2 + 8x + 2,\ x \geq -4$	$y = \frac{x+1}{4}$
$y = 3x^2 - 12x + 15,\ x \geq 2$	$y = \sqrt{x+14} - 4$
$y = 4x + 16$	$y = \sqrt{\frac{x-3}{3}} + 2$

(RF5.8)

Performance

- Préparer des feuilles de papier carrées sur lesquels figurent des graphiques de paires de fonctions. Créer les paires de telle manière que certaines sont des réciproques l'une de l'autre et d'autres non. Dessiner le plan cartésien de chaque graphique pour faire en sorte que l'échelle des axes soit identique et que les limites de l'axe des x et de l'axe des y soient les mêmes. Distribuer un carré à chaque élève et lui demander de plier le papier d'une manière qui permet de déterminer si oui ou non les graphiques sont la réciproque l'un de l'autre. Leur demander d'expliquer leur méthode. (RF5.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

1.4 La réciproque d'une relation

MÉ: pp. 44-55

GE: pp. 25-30

Note:

Les exemples dans le manuel de l'élève aux p. 49-50 sont limités à des fonctions quadratiques de forme $y = ax^2 + c$.

Les élèves devraient aussi voir des équations de forme $y = ax^2 + bx + c$, comme au no. 10 de la p. 53 et au no. 12 de la p. 54.

Les fonctions racine

Durée suggérée: 8 heures

Aperçu du module

Orientation et contexte

Les élèves continueront de travailler sur les transformations de fonctions dans ce module, qui porte particulièrement sur la fonction racine. Les élèves dessineront des graphiques de fonctions racine en appliquant des translations, des étirements et des réflexions au graphique de $y = \sqrt{x}$. Ils analyseront les transformations pour déterminer le domaine et l'image des fonctions racine.

Dans ce module, le graphique de $y = \sqrt{f(x)}$ est lié au graphique de $y = f(x)$ et des comparaisons sont faites entre le domaine et l'image de chacune de ces fonctions. Les élèves apprendront aussi à résoudre des équations avec racine carrée de façon approximative à partir d'un graphique.

Cadre des résultats d'apprentissage

RAG

Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

RAS RF12

Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).

Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathematiques 3230
Relations et Fonctions		
AN2. Démontrer une compréhension de nombre irrationnel en : • représentant, identifiant et simplifiant des nombres irrationnels; • ordonnant des nombres irrationnels. [L, CE, R, V] RF6. Associer les relations linéaires exprimées sous la forme: • Explicite: $y = mx + b$ • Générale: $Ax + By + C = 0$ • Pente-point: $y - y_1 = m(x - x_1)$ à leurs graphiques. [L, R, T, V]	AN2. Résoudre des problèmes comportant des opérations impliquant des radicaux numériques et algébriques. [L, CE, RP, R] AN3. Résoudre des problèmes comportant des équations contenant des radicaux (limitées aux racines carrées). [C, RP, R] RF3. Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = a(x - p)^2 + q$, et déterminer : • le sommet; • le domaine et l'image; • la direction de l'ouverture; • l'axe de symétrie; • les coordonnées à l'origine. [L, R, T, V] RF5. Résoudre des problèmes comportant des équations quadratiques. [C, L, RP, R, T, V	RF12. Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical). [L, R, T, V]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF12. Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).

[L, R, T, V]

Indicateurs de rendement:

RF12.1 *Esquisser, à l'aide d'une table de valeurs, le graphique de la fonction* $y=\sqrt{x}$*, et en énoncer le domaine et l'image.*

RF12.2 *Esquisser le graphique d'une fonction de la forme* $y-k=a\sqrt{b(x-\mathrm{h})}$ *en appliquant des transformations au graphique de la fonction* $y=\sqrt{x}$ *, et en énoncer le domaine et l'image.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont travaillé avec les racines carrées et des expressions contenant des racines carrées et des radicandes numériques et variables (AN2). Ils ont aussi résolu des équations et des problèmes comportant des équations avec racine carrée (AN3). Les élèves utiliseront maintenant leurs connaissances sur les transformations acquises dans le module précédent (RF4) pour représenter graphiquement les fonctions racine. Ils détermineront aussi le domaine et l'image de fonctions racine .

Même si les élèves ont été initiés aux équations avec racine carrée (AN3), il est possible qu'ils n'aient pas encore vu à quoi ressemble le graphique des fonctions racine. Ils devraient être initiés à ces graphiques en dessinant celui de $y=\sqrt{x}$ à partir d'une table de valeurs. Une fois le graphique dessiné, il devrait y avoir une discussion au sujet du domaine et de l'image de $y=\sqrt{x}$. Les élèves doivent se rendre compte que comme il est impossible de trouver la racine carrée de nombres négatifs dans le système des nombres réels, le radicande doit être supérieur ou égal à zéro, ce qui donne un domaine de $x \in [0, \infty)$. Les élèves pourraient aussi utiliser la technologie pour créer la table de valeurs et le graphique.

Une fois les élèves sont familiers avec les caractéristiques du graphique de $y=\sqrt{x}$, ils devraient examiner les caractéristiques d'une fonction racine de la forme $y-k=a\sqrt{b(x-\mathrm{h})}$ ou $y=a\sqrt{b(x-\mathrm{h})}+k$.

Pour produire les graphiques, ils peuvent :

- appliquer les transformations
- créer une règle de correspondence, en tirer une table de valeurs et dessiner le graphique point par point

Les élèves ont déjà appris ces techniques de représentation graphique avec les fonctions générales (RF4). Ils doivent maintenant les appliquer à cette fonction en particulier $y=\sqrt{x}$.

Les élèves peuvent étudier une fonction racine comme $y-1=-3\sqrt{\frac{1}{2}(x+6)}$. En appliquant leurs connaissances sur les transformations, ils devraient se rendre compte que :

- $a = -3$, donc tous les points sont étirés verticalement par un facteur de 3
- comme $a < 0$, tous les points sont réfléchis par rapport à l'axe des x
- $b = ½$, donc tous les points sont étirés horizontalement par un facteur de 2
- $h = -6$, donc tous les points sont déplacés de 6 unités vers la gauche
- $k = 1$, donc tous les points sont déplacés de 1 unité vers le haut

Résultat apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de décrire les similarités et les différences entre les graphiques de $y=\sqrt{x}$ et $y=\frac{1}{3}\sqrt{-2(x+1)}-4$. Ils devraient discuter du domaine et de l'image de chaque fonction.

(RF12.1, RF12.2)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de créer le graphique de $y-3=-\sqrt{-(x-1)}$, en décrivant toutes les transformations et en donnant le domaine et l'image de la fonction.

(RF12.2)

Performance

- Créer plusieurs paires de cartes dans lesquelles une carte donne l'équation d'une fonction racine et la deuxième carte donne l'image. Distribuer les cartes aux élèves et leur demander de trouver leur partenaire en associant la fonction racine à son image. Lorsque les élèves ont trouvé leur partenaire, ils doivent dessiner le graphique de la fonction racine et trouver son domaine.

(RF12.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

2.1 Les fonctions racine et leurs transformations

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 62-77

Guide d'enseignement (GE): pp. 38-43

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

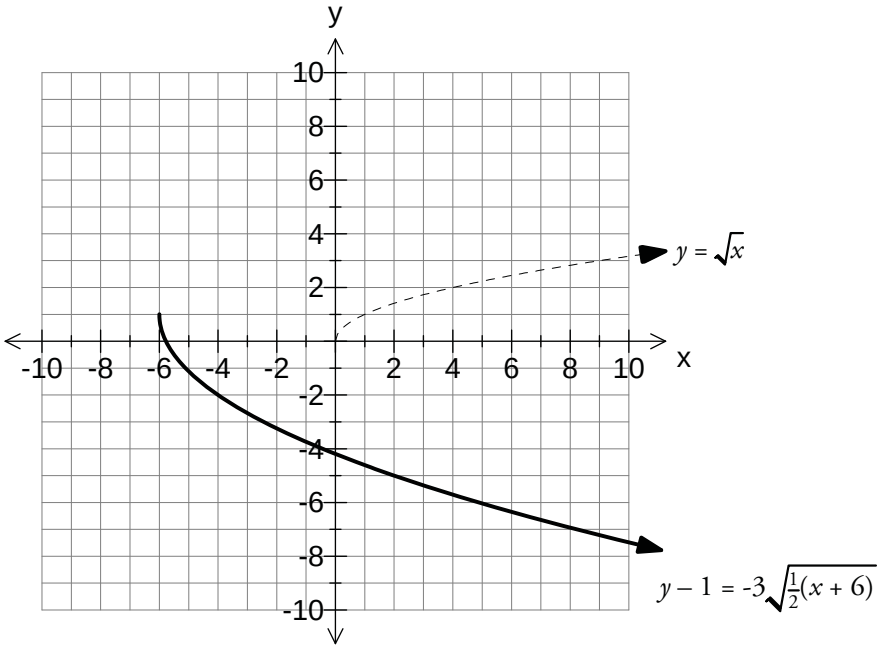
L'élève doit pouvoir:
RF12 Suite...

Indicateur de rendement:

RF12.2 S*uite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Lorsque les élèves créent le graphique en appliquant des transformations, leur rappeler qu'ils doivent appliquer les étirements et les réflexions en premier, et les translations en dernier.



Les élèves peuvent également écrire la règle de représentation graphique de la fonction, transformer les points de $y = \sqrt{x}$, et les tracer pour créer le graphique.

Les élèves doivent déterminer le domaine et l'image de la fonction à partir du graphique. Une fois qu'ils ont travaillé sur un certain nombre d'exemples, ils devraient voir une régularité qui leur permet de déterminer le domaine et l'image d'une expression avec racine carrée comme $y = 4\sqrt{-2(x+5)} + 7$ sans créer un graphique précis. Ils peuvent le faire en examinant les réflexions et les translations. Les élèves doivent se rendre compte que les étirements n'ont pas d'effet sur le domaine et l'image des fonctions racine.

Il est important de noter que les élèves n'ont pas besoin de déterminer l'équation d'une fonction racine à partir de son graphique ou de ses points.

Résultat apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves d'esquisser les graphiques de $f(x)=\sqrt{x-3}$ et $g(x)=-\sqrt{x-3}$ sur le même plan cartésien. Ils devraient remarquer qu'ensemble, les deux graphiques forment une parabole. Demander aux élèves d'expliquer pourquoi il n'est pas possible d'utiliser une fonction quadratique pour définir *y* comme une fonction de *x* à partir du graphique obtenu.

(RF12.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

2.1 Les fonctions racine et leurs transformations

MÉ: pp. 62-77

GE: pp. 38-43

Note

MÉ: p. 68 - Exemple 3,
p. 74 - no. 10

On ne s'attend pas à ce que les élèves déterminent une fonction racine à partir d'un graphique.

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF12 Suite ...

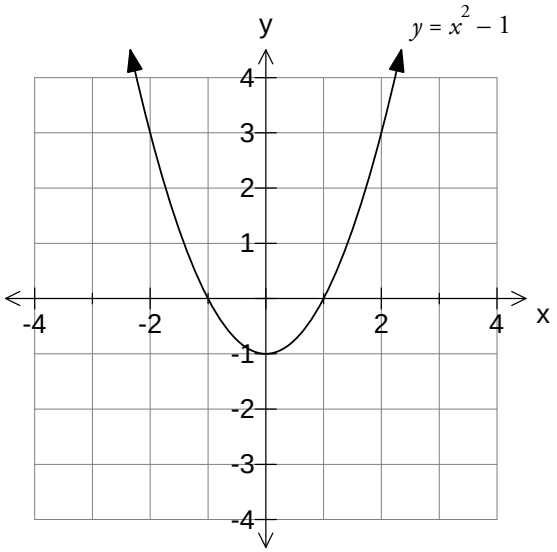
Indicateurs de rendement:

Esquisser le graphique d'une fonction de la forme $y = \sqrt{f(x)}$ *étant donné le graphique de la fonction* $y = f(x)$ *et expliquer les stratégies utilisées.*

RF12.4 *Comparer le domaine et l'image de la fonction* $y = \sqrt{f(x)}$ *au domaine et à l'image de la fonction* $y = f(x)$, *et expliquer pourquoi les domaines et les images peuvent être différents.*

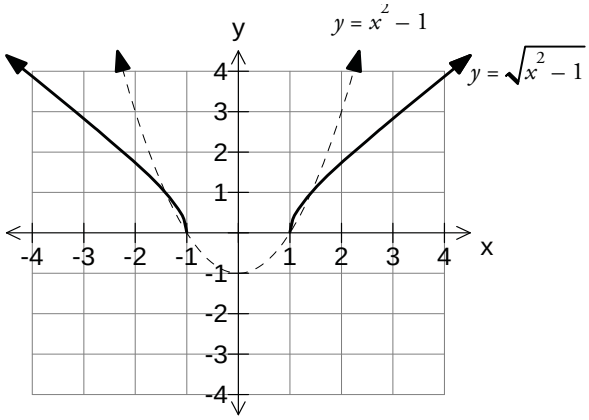
Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Étant donné le graphique de $y = f(x)$, les élèves devraient représenter $y = \sqrt{f(x)}$. Par exemple, demander aux élèves d'examiner le graphique de $y = x^2 - 1$.



Une des méthodes permettant de produire le graphique de $y = \sqrt{x^2 - 1}$ est de commencer par générer une table de valeurs pour $y = x^2 - 1$ à partir du graphique donné. Ensuite, pour représenter, $y = \sqrt{x^2 - 1}$ les élèves utilisent la racine carrée des valeurs de y.

x	$f(x)$	$\sqrt{f(x)}$
-2	3	$\sqrt{3}$
-1	0	0
0	-1	**non défini**
1	0	0
2	3	$\sqrt{3}$



Demander aux élèves de réfléchir à ce qui suit :

- Pourquoi le graphique est-il non défini sur l'intervalle $x \in (-1, 1)$?
- Le graphique comporte-t-il des points invariants? Si oui, quels sont-ils?
- Où se situe le graphique de $y = \sqrt{f(x)}$? Au dessus de $y = f(x)$? Au-dessous de $y = f(x)$?

Les élèves doivent comprendre que $y = \sqrt{f(x)}$ est non défini quand $f(x) < 0$, que les points invariants se situent là où $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$, que $\sqrt{f(x)}$ se situe au dessus du graphique de $y = f(x)$ quand $0 < f(x) < 1$. Ces résultats, de même que d'autres points importants, peuvent ensuite être utilisés pour tracer le graphique de $y = \sqrt{f(x)}$ étant donné $y = f(x)$.

Résultat apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

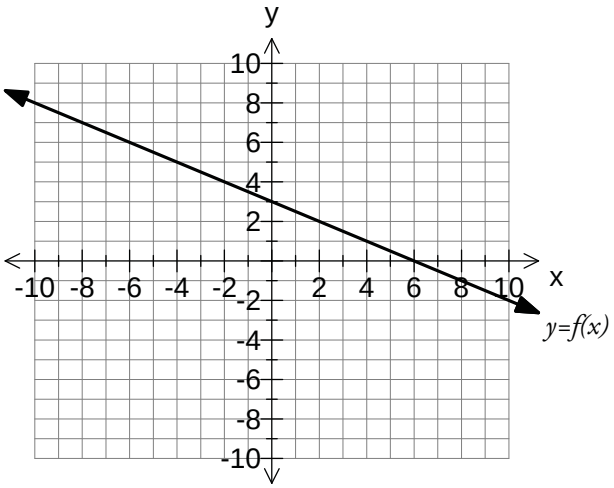
- Demander aux élèves de déterminer le domaine et l'image de chaque fonction sans la représenter graphiquement :

  (i) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

  (ii) $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x + 12}$

(RF12.4)

- Étant donné le graphique de *f(x)* ci-dessous, les élèves doivent créer le graphique de $y = \sqrt{f(x)}$ en examinant les coordonnées à l'origine et les points invariants :



(RF12.3)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi le domaine de $y = \sqrt{x^2 + 4}$ est $\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$, mais le domaine de $y = \sqrt{x^2 - 4}$ est $\{x \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2, x \in \mathrm{R}\}$.

(RF12.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

2.2 La racine carrée d'une fonction

MÉ: pp. 78-89

GE: pp. 44-49

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF12 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF12.3, RF12.4 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves peuvent aussi générer une table de valeurs à partir de l'équation $y = f(x)$. Ils peuvent ainsi générer le graphique de $y = \sqrt{f(x)}$. Ils peuvent aussi générer le graphique et la table de valeurs de $y = f(x)$ à l'aide de la technologie.

Les graphiques de $y = f(x)$ sont limités à des fonctions linéaires et quadratiques.

Les élèves peuvent utiliser les graphiques de $y = f(x)$ et de $y = \sqrt{f(x)}$ pour déterminer le domaine et l'mage des deux fonctions. Lorsque les équations des fonctions sont données, ils peuvent commencer par dessiner le graphique de chaque fonction, puis en déterminer le domaine et l'image.

Une autre méthode permettant de déterminer le domaine et l'image de $y = f(x)$ et $y = \sqrt{f(x)}$ consiste à analyser les points importants. Étant donné $y = -x^2 + 6x - 5$ par exemple, les élèves peuvent utiliser leur connaissance des fonctions quadratiques acquise dans le cours Mathématiques 2230 pour déterminer les abscisses et les ordonnés à l'origine de la parabole (RF5), et le sommet de la parabole (RF3). Cette information peut ensuite servir à déterminer les points importants du graphique de $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$:

Fonction	$y=-x^2 + 6x-5$	$y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$
Abscisses à l'origine	1 et 5	1 et 5
Ordonnés à l'origine	-5	aucun
Maximum	(3,4)	(3,2)
Minimum	aucun	0

RF12.5 *Décrire la relation entre les racines d'une équation comportant des radicaux et les abscisses à l'origine du graphique de la fonction racine correspondante.*

À partir des renseignements ci-dessus, les élèves doivent trouver que le domaine de $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ est $x \in [1, 5]$et que son image est $y \in [0, 2]$. Ils devraient arriver à la généralisation que le domaine de $y = \sqrt{f(x)}$ comprend toutes les valeurs où $f(x) \geq 0$, et que l'image correspond à la racine carrée de toutes les valeurs de l'image de $f(x)$ pour lesquelles $f(x)$ est définie.

La relation entre les racines (zéros) d'une fonction générale et les abscisses à l'origine du graphique correspondant a été établie plus tôt dans ce cours (RF12). Ces connaissances sont maintenant appliquées à la fonction racine.

RF12.6 *Déterminer, graphiquement, une solution approximative d'une équation comportant des radicaux.*

Au départ, les élèves devraient recevoir le graphique d'une fonction racine ou utiliser la technologie pour créer le graphique, afin de trouver une solution approximative. Les élèves doivent tracer des fonctions racines sans technologie seulement si ces fonctions comportant des transformations simples.

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont résolu des équations algébriques comportant des racines carrées (AN3). Ici, l'objectif est de résoudre des équations à l'aide du graphique.

Résultat apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

(i) En général, en quoi le graphique de $y = \sqrt{f(x)}$ ressemble-t-il à celui de $y = f(x)$? En quoi en est-il différent?

(RF12.3)

(ii) Expliquez pourquoi le domaine de la fonction $f(x) = \sqrt{2x+5}$ est restreint alors que celui de la fonction $y = \sqrt{2x^2+5}$ ne l'est pas.

(RF12.4)

- Demander aux élèves d'esquisser les graphiques des fonctions racine ci-dessous et d'estimer leurs solutions à l'aide du graphique :

(i) $\sqrt{x+5} = 4$

(ii) $\sqrt{x^2-1} = x+3$

(RF12.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

2.2 La racine carrée d'une fonction

MÉ: pp. 78-89

GE: pp. 44-49

2.3 Résoudre graphiquement des équations contenant un radical

MÉ: pp. 90-98

GE: pp. 50-55

Note

Résoudre algébriquement des équations avec racine carrée est une révision du cours Mathématiques 2230. Ce n'est pas l'objet dans ce résultat d'apprentissage.

La trigonométrie et le cercle unitaire

Durée suggérée: 12 heures

Aperçu du module

Orientation et contexte

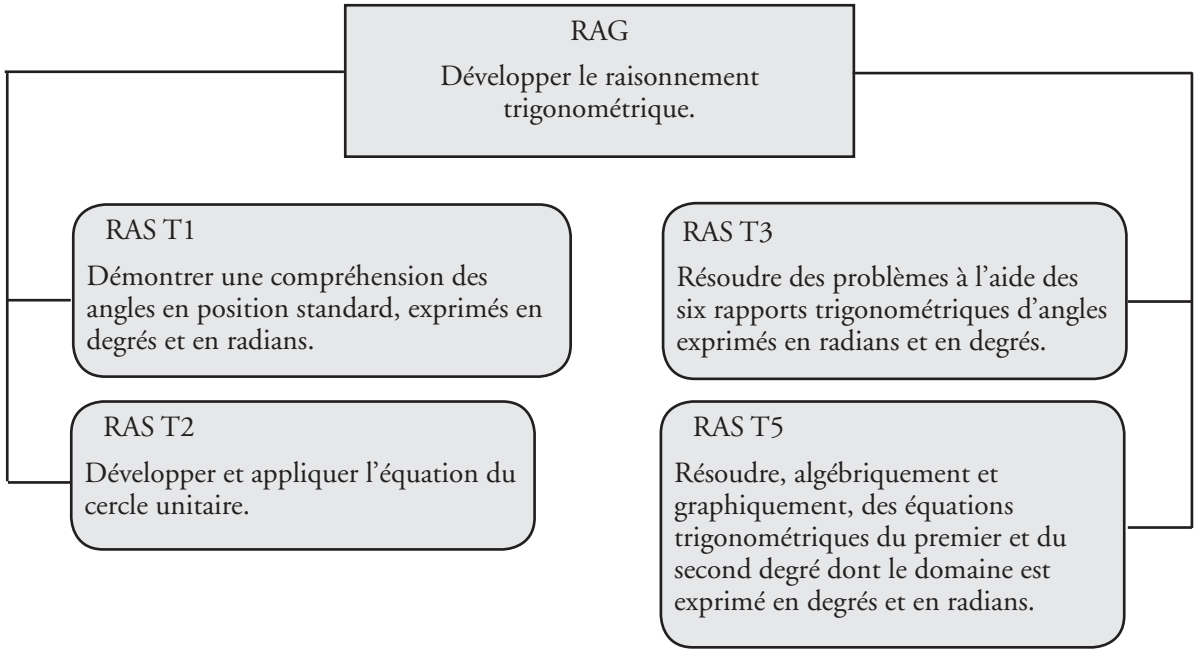
Dans ce module, les élèves seront initiés aux mesures d'angle en radians. Ils continueront aussi à travailler avec mesures d'angle en degrés et feront la conversion des radians aux degrés. Ils dessineront des angles trigonométriques et détermineront la mesure d'angles coterminaux. Les élèves travailleront sur des problèmes de longueurs d'arc, des angles au centre.

L'équation du cercle unitaire, $x^2 + y^2 = 1$, sera abordée puis généralisée à celle d'un cercle de centre (0, 0) et de rayon r. Les élèves détermineront des coordonnées sur le cercle unitaire et détermineront la mesure d'un angle à partir d'un point sur le cercle unitaire.

Les élèves mettront ensuite en relation les rapports trigonométriques et les coordonnées des points sur le cercle unitaire. Ils seront initiés aux rapports trigonométriques réciproques.

Les élèves résoudront algébriquement des équations trigonométriques du premier et du second degré, en radians et en degrés. Ces apprentissages continueront d'être utilisés tout au long des apprentissages à venir sur la trigonométrie.

Cadre des résultats d'apprentissage



Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
La trigonométrie		
M4. Développer et appliquer les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus, tangente) pour résoudre des problèmes comportant des triangles rectangles. [C, L, RP, R, T, V] M2. Appliquer le raisonnement proportionnel pour résoudre des problèmes comportant des conversions entre des unités de mesure SI et impériales. [C, CE, RP]	T1. Démontrer une compréhension des angles en position standard [0° à 360°]. [R, V] T2. Résoudre des problèmes comportant les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus et tangente) pour des angles de 0° à 360° en position standard. [C, CE, RP, R, T, V] T3. Résoudre des problèmes à l'aide de la loi du cosinus et la loi des sinus, y compris le cas ambigu. [C, L, RP, R, T]	T1. Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians. [L, CE, R, V] T2. Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire. [L, R, V] T3. Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés. [CE, RP, R, T, V] T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians. [L, RP, R, T, V]

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T1. Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.

[L, CE, R, V]

Indicateurs de rendement:

T1.1 *Esquisser un angle (positif ou négatif) en position standard dont la mesure est exprimée en degrés.*

T1.2 *Esquisser, en position standard, un angle dont la mesure est de 1 radian.*

T1.3 *Décrire la relation parmi la mesure d'un angle, en degrés et en radians.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont été initiés aux angles en position standard de 0° à 360°(T1). Ils verront maintenant pour la première fois des angles négatifs et des angles de plus de 360°.

Jusqu'à maintenant, les élèves ont travaillé uniquement avec des mesures d'angle en degrés. Ils seront initiés aux mesures en radians et étudieront la relation entre les radians et les degrés. Ils apprendront aussi sur les angles coterminaux et les longueurs d'arc.

Revenir sur les esquisses d'angles positifs en degrés. Une révision de la terminologie, y compris côté initial, côté terminal, sommet, secteur et angle en position standard pourrait être nécessaire. Les concepts de rotation horaire et antihoraire devraient ensuite être abordés. Certains élèves peuvent avoir de la difficulté à associer le sens antihoraire au sens de rotation positif et le sens horaire au sens de rotation négatif. Il peut être utile de montrer que la rotation positive se dirige vers le haut à partir du côté initial trigonométrique, tandis que la rotation négative se dirige vers le bas. L'axe des x peut aussi être considéré comme une droite allant d'« ouest »(−) au « est » (+) et l'axe des y, comme une droite allant du « sud » (−) au « nord » (+). Une rotation vers le haut de l'axe des x peut être plus facile à concevoir comme positive ainsi.

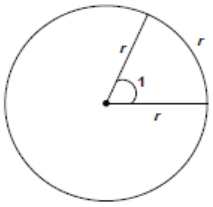
Pour initier les élèves aux mesures en radians, un angle trigonométrique de 90° peut être représenté dans le plan cartésien. Cet angle intercepte un arc correspondant au quart de la circonférence d'un cercle quelconque dont le centre est l'origine. Les élèves devraient se rendre compte que :

- Dans un cercle unitaire de rayon 1, un angle de 90° intercepte un arc de $\frac{\pi}{2}$ unités puisque $C = 2\pi$ et $\frac{1}{4}$ de 2π est $\frac{\pi}{2}$.
- Dans un cercle de rayon 5, la circonférence est de, 10π donc un angle de 90° intercepte un arc d'une longueur de $\frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$.

Les élèves doivent examiner le rapport de la longueur de l'arc intercepté par un angle de 90° sur le rayon du cercle pour des cercles de tailles variées. Ils devraient conclure que ces rapports sont tous de $\frac{\pi}{2}$. Le fait que le rapport est constant est la base de la mesure des angles en radians.

$$\text{Mesure en radians} = \frac{\text{longueur d'arc}}{\text{rayon}}$$

Comme la mesure en radians d'un angle indique combien de fois le rayon du cercle est contenu dans la longueur de l'arc intercepté, les élèves devraient conclure que la mesure d'un angle en radians sera 1 si la longueur de l'arc intercepté est égale au rayon.



Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Observation

- Demander aux élèves de dessiner un cercle et de dessiner approximativement des angles mesurant 1 radian, 2 radians, 3 radians, 4 radians, 5 radians et 6 radians.

(T1.2)

Entrevue

- Demander aux élèves d'expliquer comment déterminer, à l'aide d'un diagramme, laquelle est la plus grande mesure entre 2,8 radians ou 180°.

(T1.3)

- Demander aux élèves d'expliquer quelle mesure est la plus grande : 4,2 radians ou $1{,}4\pi$ radians.

(T1.3)

Journal

- Demander aux élèves de répondre à la question suivante :

  Votre camarade était absent pour l'introduction aux radians. Décrivez-lui, à l'aide d'un schéma, comment dessiner un angle mesurant 2 radians.

(T1.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.1 Les angles et leur mesure

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 166-179

Guide d'enseignement (GE): pp. 92-96

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques	Stratégies d'enseignement et d'apprentissage
L'élève doit pouvoir:	
T1 Suite ...	
Indicateurs de rendement:	
T1.3 *Suite*	Après avoir été initiés aux mesures en radians sur un cercle de rayon 1, les élèves doivent comprendre que 360° est équivalent à 2π en radians. Par conséquent, 180° est équivalent à π. Certaines mesures en radians sont fréquemment utilisées. Les élèves doivent se familiariser avec $2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ et leurs multiples.
T1.4 *Esquisser, en position standard, un angle dont la mesure est exprimée sous la forme de $k\pi$ radians, où $k \in \mathbb{Q}$.*	Lorsqu'ils dessinent des angles mesurant $k\pi$ radians, les élèves devraient visualiser les angles en tant que fraction de π ou 2π. Par exemple, comme π est équivalent à une demi rotation et $\frac{\pi}{2}$ est $\frac{1}{2}$ de π, $\frac{\pi}{2}$ correspond à un quart de rotation. Pour les élèves qui ont du mal à visualiser les angles en radians, il pourrait être utile de faire la conversion en degrés pour vérifier l'exactitude de leur croquis. Alors, l'objectif est d'apprendre à travailler en radians sans avoir d'abord à convertir les angles en degrés.
T1.5 *Exprimer en radians la mesure d'un angle (valeur exacte ou décimale approximative) étant donné sa mesure en degrés.*	Lorsque le rapport π = 180° a été établie, les élèves peuvent faire la conversion entre les mesures en degrés et en radians. Pour convertir des radians en degrés, ils peuvent résoudre cette équation en termes de radians. π rad = 180° $\therefore \quad 1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$
T1.6 *Exprimer en degrés la mesure d'un angle (valeur exacte ou décimale approximative) étant donné sa mesure en radians.*	Pour réécrire $\frac{9\pi}{2}$ radians en degrés, par exemple, ils doivent multiplier par 1 radian, ou $\frac{180^\circ}{\pi}$. De même, pour convertir les degrés en radians ils doivent résoudre l'équation en termes de degrés : 180° = π rad, donc $1^\circ = \frac{\pi}{180}$. Les élèves devraient apprendre à exprimer aisément des mesures en radians en valeurs exactes ou approximatives. Les élèves font souvent l'erreur d'inverser le facteur de conversion. Ils peuvent éviter cette erreur en utilisant l'analyse d'unité, qu'ils ont vue dans le cours Mathématiques 1231 (M2). Les élèves devraient être conscients que toute mesure d'angle donnée sans symbole de degré est présumée être en radians.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de dessiner les angles suivants en position standard:

  (i) $\frac{\pi}{4}$

  (ii) $\frac{2\pi}{3}$

  (iii) $\frac{7\pi}{6}$

  (iv) $\frac{-3\pi}{2}$

  (T1.4)

- Demander aux élèves d'exprimer les mesures des angles suivants en radians :

  (i) $60°$
  (ii) $150°$
  (iii) $-225°$
  (iv) $-144°$
  (v) $214{,}5°$

  (T1.5)

- Demander aux élèves d'exprimer les mesures en radians suivantes en degrés :

  (i) $\frac{2\pi}{3}$

  (ii) $-\frac{7\pi}{4}$

  (iii) $\frac{11\pi}{12}$

  (iv) -5

  (T1.6)

Performance

- Pour l'activité *Cinq minutes de révision*, donner cinq minutes aux équipes pour réviser la manière d'esquisser des angles trigonométriques et la relation entre les degrés et les radians. Les élèves de chaque groupe peuvent se poser des questions et y répondre.

  (T1.1, T1.4, T1.5, T1.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.1 Les angles et leur mesure

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 166-179

Guide d'enseignement (GE): pp. 92-96

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
T1 Suite ...

Indicateurs de rendement:

T1.7 *Déterminer la mesure, en degrés ou en radians, de tous les angles d'un domaine donné ayant le même côté terminal qu'un angle en position standard.*

T1.8 *Déterminer la forme générale des mesures, en degrés ou en radians, de tous les angles ayant le même côté terminal qu'un angle en position standard.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Le concept d'angles coterminaux est nouveau pour les élèves. Les angles coterminaux sont des angles trigonométriques qui ont le même côté terminal; ils peuvent être mesurés en degrés ou en radians. Les exemples devraient comprendre des angles coterminaux positifs et négatifs obtenus en additionnant ou en soustrayant des multiples de 360° ou de 2π. Cela mène à la forme générale, exprimée sous la forme $\theta \pm (360°)n$ ou $\theta \pm 2\pi n$ où $n \in$ W. La solution générale pourrait aussi être exprimée sous la forme $\theta + (360°)n$ ou $\theta + 2\pi n$, $n \in$ I. Lors de l'initiation aux angles coterminaux, encourager les élèves à dessiner les angles. Cela met en évidence le fait que les angles coterminaux ont le même côté terminal.

T1.9 *Expliquer la relation entre la mesure en radians d'un angle en position standard et la longueur de l'arc intercepté d'un cercle de rayon r, et résoudre des problèmes connexes.*

À partir de la définition d'un radian, il est possible d'établir la relation entre un angle au centre θ et la longueur de l'arc intercepté sur un cercle de rayon *r*.

longueur de l'arc = $\theta \times$ rayon, où θ est la mesure de l'angle au centre en radians

Les élèves doivent être en mesure de trouver n'importe quelle variable dans cette relation lorsque la mesure des deux autres est fournie. Étant donné un arc de 20 cm sur un cercle de 5,4 cm de rayon, par exemple, ils pourraient avoir à déterminer la mesure de l'angle au centre en radians ou en degrés. Ils ont le choix de réarranger l'équation en termes de θ d'abord, ou de substituer les valeurs connues avant de résoudre l'équation pour trouver θ.

$$\text{longueur de l'arc} = \theta \times \text{rayon}$$

$$20 = \theta \times 5{,}4$$

$$\theta \approx 3{,}7 \text{ radians ou } 212°$$

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer un angle positif et un angle négatif ayant le même côté terminal que les angles suivants :

  (i) $120°$

  (ii) $-515°$

  (iii) $\frac{3\pi}{4}$

  (iv) -9π

  (T1.7)

- Demander aux élèves de déterminer la mesure de tous les angles qui sont coterminaux avec :

  (i) $310°$

  (ii) $-\frac{3\pi}{4}$

  (T1.8)

- Demander aux élèves de déterminer la mesure des longueurs d'arc interceptées par les angles et les rayons ci-dessous :

  (i) Angle au centre de $\frac{2\pi}{3}$ et de 10 cm de rayon

  (ii) Angle au centre de 2,6 rad et rayon de 4,9 cm

  (T1.9)

- Demander aux élèves de déterminer la mesure du rayon d'un cercle si une longueur d'arc de 42 pi est interceptée par un angle de $\frac{7\pi}{4}$.

  (T1.9)

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  Pendant des vacances en famille, vous allez souper dans « l'aiguille spatiale » de Seattle. Il y a au sommet de l'aiguille un restaurant tournant de forme circulaire dont le rayon mesure 40 pi. Le restaurant fait une rotation complète par heure. À 18 h 42, vous vous asseyez à une table près de la fenêtre. Vous finissez de manger à 20 h 28. Quelle est la mesure d'angle correspondant à votre rotation pendant le repas? Quelle distance avez vous parcourue en pieds?

  (T1.9)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.1 Les angles et leur mesure

MÉ: pp. 166-179

GE: pp. 92-96

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T2 Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire.

[L, R, V]

Indicateurs de rendement:

T2.1 *Formuler l'équation du cercle unitaire à partir du théorème de Pythagore.*

T2.2 *Généraliser l'équation du cercle de centre (0, 0) et de rayon r.*

T2.3 *Décrire les six rapports trigonométriques à l'aide d'un point P(x, y) qui représente l'intersection du côté terminal d'un angle et du cercle unitaire.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

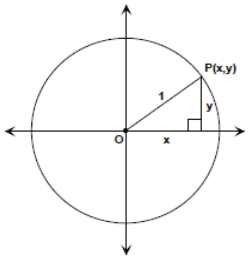
Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont déterminé les valeurs exactes des rapports trigonométriques de base pour des angles entre 0° et 360° en utilisant des triangles rectangles particuliers. Le cercle unitaire pourrait avoir été présenté aux élèves comme stratégie pour trouver des valeurs exactes. Cependant, il ne s'agissait pas directement d'un résultat d'apprentissage. Maintenant, les élèves seront officiellement initiés au cercle unitaire et utiliseront son équation pour représenter l'équation de tout cercle ayant l'origine pour centre.

Les élèves peuvent trouver l'équation du cercle unitaire en utilisant le théorème de Pythagore. À partir d'un cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre, ils doivent marquer un point *P* sur le cercle et dessiner un triangle rectangle. Ils devraient se demander pourquoi la valeur absolue de la coordonnée y représente la distance entre un point et l'axe des *x*.

L'application du théorème de Pythagore donne :

$x^2 + y^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 = 1$



Demander aux élèves en quoi l'équation serait différente si le rayon était de *r* au lieu de 1. Ils devraient ainsi déduire l'équation générale d'un cercle centré (0,0) à l'origine de rayon *r* soit $x^2 + y^2 = r^2$.

Étant donné un angle θ en position standard exprimé en degrés ou en radians, les élèves doivent déterminer les coordonnées du point correspondant sur le cercle unitaire. Inversement, ils doivent savoir déterminer l'angle trigonométrique qui correspond à un point sur le cercle unitaire.

Dans les cours Mathématiques 1231 et 2230, les élèves ont travaillé avec les trois rapports trigonométriques de base. Ils sont maintenant exposés pour la première fois aux rapports réciproques : cosec θ, sec θ et cotan θ.

En observant de nouveau le cercle unitaire ci-dessus, les élèves devraient remarquer $\sin\theta = \frac{y}{1}$, $\cos\theta = \frac{x}{1}$, et $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Ils devraient également voir que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ Une fois les élèves initiés aux rapports réciproques, $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y}$, $\sec\theta = \frac{1}{x}$ et $\text{cotan}\,\theta = \frac{x}{y}$, il est naturel de poursuivre avec une discussion des relations suivantes :

$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\text{cotan}\,\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ou $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Les élèves devraient être informés des restrictions de θ pour tan θ, cosec θ, sec θ et cotan θ.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer l'équation d'un cercle dont le centre est à (0, 0) et le rayon mesure :
  (i) 4 unités
  (ii) $\sqrt{34}$ unités
  (iii) $2\sqrt{5}$ unités

(T2.2)

- Demander aux élèves de déterminer si le point donné est situé sur le cercle dont l'équation est donnée.
  (i) P(−2, 6); $x^2 + y^2 = 49$
  (ii) $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; le cercle unitaire

(T2.2)

- Demander aux élèves de déterminer les coordonnées de x ou de y sur le cercle unitaire à partir de la coordonnée donnée. Utiliser des exemples comme :
  (i) $P\left(\frac{1}{5}, y\right)$ dans le quadrant I
  (ii) $P\left(x, -\frac{3}{8}\right)$ dans le quadrant III

(T2.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée
Mathématiques pré-calcul 12

4.2 Le cercle unitaire

MÉ: pp. 180-190

GE: pp. 97-101

4.3 Les rapports trigonométriques

MÉ: pp. 191-205

GE: pp. 102-107

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T3. Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.

[CE, RP, R, T, V]

Indicateurs de rendement:

T3.1 *Déterminer, à l'aide de la technologie, la valeur approximative d'un rapport trigonométrique de tout angle dont la mesure est exprimée en degrés ou en radians.*

T3.2 *Déterminer, à l'aide d'un cercle unitaire ou d'un triangle de référence, la valeur exacte du rapport trigonométrique d'un angle dont la mesure est exprimée en degrés qui sont des multiples de 0º, 30º, 45º, 60º ou 90º ou pour des angles dont la mesure est exprimée en radians, qui sont des multiples de,* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, *or* $\frac{\pi}{2}$, *et expliquer la stratégie.*

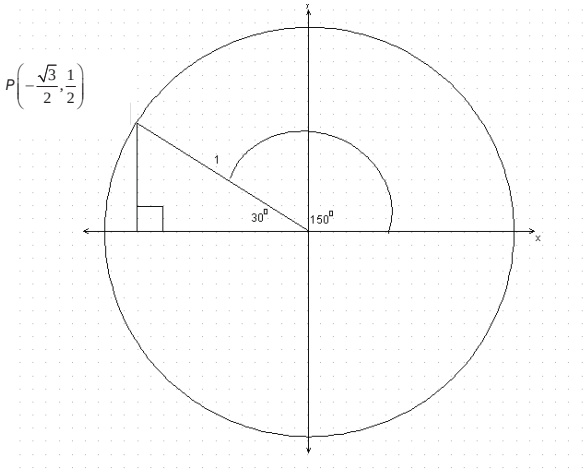
T3.3 *Esquisser un schéma représentant un problème comportant des rapports trigonométriques.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont résolu des problèmes en utilisant les trois rapports trigonométriques de base (T2). Les angles étaient exprimés en degrés. Ils apprendront maintenant à utiliser les rapports réciproques et travailleront en degrés et en radians.

Les élèves doivent comprendre comment utiliser correctement une calculatrice scientifique ou graphique pour évaluer les six rapports trigonométriques. Ils devraient être en mesure d'utiliser efficacement leurs calculatrices, tant en degrés qu'en radians, en prenant soin de vérifier qu'ils utilisent le bon mode dans tous leurs calculs.

Les élèves ont déjà de l'expérience pour déterminer des angles de référence positifs. Cette expérience peut aussi être appliquée à des angles négatifs. Les élèves peuvent également utiliser leurs connaissances préalables sur les triangles de référence et le cercle unitaire pour déterminer la valeur exacte des six rapports trigonométriques. À partir du schéma ci-dessous, par exemple, ils peuvent déterminer la valeur des rapports trigonométriques à 150°.



$$\text{cotan } 150^{\circ} = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

Les élèves devraient aussi simplifier des expressions comme $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin(-\pi)}{\tan(30°)}$.
Les expressions pour lesquelles il est nécessaire d'utiliser la rationalisation sont limitées à celles qui ont des monômes comme dénominateurs. Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont appris à effectuer des opérations sur des expressions rationnelles (AN5).

Les élèves peuvent utiliser une calculatrice pour vérifier leurs réponses. L'accent est cependant placé sur la détermination des valeurs exactes à l'aide du cercle unitaire des triangles de référence et de stratégies de calcul mental.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de trouver la valeur exacte des expressions suivantes :

(i) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

(ii) $cosec\left(\frac{\pi}{3}\right)+cotan\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

(iii) $cotan^2\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

(iv) $\dfrac{cotan\left(\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)}{cosec\left(-240^\circ\right)}$ (T3.2, T3.3)

Performance

- Pour l'activité *Quatre coins*, chaque élève reçoit une carte sur laquelle figure un rapport trigonométrique. Les quatre coins de la pièce correspondent aux quatre quadrants. Les élèves décident dans quel quadrant se trouve l'angle figurant sur leur carte et s'y déplacent. Les élèves situés dans chaque quadrant doivent alors vérifier que les angles sont correctement placés dans leur quadrant et évaluer chaque rapport trigonométrique.
  Les cartes doivent comprendre un mélange de mesures en degrés et en radians, d'angles positifs et négatifs et de valeurs exactes et approximatives.
  Exemples de rapports :

$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\tan(-210^\circ)$	$cosec\frac{11\pi}{4}$	$\sin(-310^\circ)$
$cotan\frac{5\pi}{3}$	$\sec 315^\circ$	$\sin 123^\circ$	$\sec 3{,}6$

(T3.1, T3.2, T3.3)

- Divisés en groupes, les élèves peuvent jouer au jeu du carrousel. Des postes de travail sont installés autour de la salle et des expressions résolues sont affichées sur les murs. Les élèves trouvent les erreurs et écrivent la bonne solution.

(T3.2, T3.3)

- Les élèves peuvent jouer à un jeu d'associations. On prépare un jeu de carte qui contient des expressions trigonométriques et un autre jeu qui contient des solutions. L'enseignant peut varier les conditions du jeu en plaçant les cartes face vers le bas ou face vers le haut.

(T3.2, T3.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.3 Les rapports trigonométriques

MÉ: pp. 191-205

GE: pp. 102-107

Note

La simplification d'expressions trigonométriques exigeant une rationalisation nécessite des exercices additionnels.

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T3 Suite ...

Indicateurs de rendement:

T3.4 *Déterminer, avec ou sans l'aide de la technologie, à partir de la valeur d'un rapport trigonométrique, les mesures exprimés en degrés ou en radians, des angles d'un domaine particulier.*

T3.5 *Décrire les six rapports trigonométriques à l'aide d'un point P(x, y) qui représente l'intersection du côté terminal d'un angle et du cercle unitaire.*

T3.6 *Déterminer en degrés ou en radians les mesures des angles dans un domaine particulier à partir d'un point situé sur le côté terminal d'un angle en position standard.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

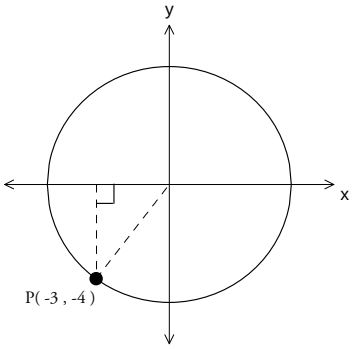
Les élèves ont déterminé les mesures d'angle en degrés pour les trois rapports trigonométriques de base. Ils ont également utilisé des triangles de référence et le cercle unitaire pour évaluer les six rapports trigonométriques. Il est naturel de poursuivre avec la détermination des mesures d'angle des six rapports trigonométriques, en radians et en degrés. Les élèves pourraient être invités à déterminer la valeur de θ, par exemple, lorsque $\sec\theta = -\sqrt{2}$ pour le domaine $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Pour déterminer l'angle de référence, ils pourraient penser à un triangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$ et le côté adjacent mesure 1. Autrement, ils pourraient appliquer le rapport réciproque $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Une fois l'angle de référence déterminé, ils doivent déterminer les quadrants dans lesquels la sécante est négative.

QII:	QIII:
$\pi - \frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

La dernière étape consiste à déterminer toutes les valeurs possibles dans un domaine donné. Rappeler aux élèves leurs travaux préalables sur les angles coterminaux.

$$\theta = \left\{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

Il est possible de déterminer les six rapports trigonométriques à partir des coordonnées d'un point situé sur le côté terminal d'un angle trigonométrique. Pour déterminer les rapports en fonction du point $P(-3, -4)$situé sur le côté terminal de l'angle, par exemple, les élèves devraient d'abord dessiner un schéma. Leur faire remarquer que le triangle rectangle utilise toujours l'axe des *x*.



Encourager les élèves à noter que parce que l'angle est dans le troisième quadrant, le sinus, le cosinus et leurs réciproques sont négatifs, alors que la tangente et la cotangente sont positives. Ces renseignements peuvent servir à valider la vraisemblance de leurs rapports. Les élèves devraient aussi déterminer la mesure de l'angle donné en radians ou en degrés.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de résoudre les équations trigonométriques suivantes :
  (i) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $0 \leq \theta < 2\pi$
  (ii) $\text{cosec}\,\theta = -2$; $0° \leq \theta < 360°$
  (iii) $\sec\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $-2\pi \leq \theta < 2\pi$

(T3.4)

- Sachant que chacun des points suivants est situé à l'intersection du cercle unitaire et du côté terminal d'un angle en position standard, demander aux élèves de :
  (i) Dessiner un schéma
  (ii) Déterminer les valeurs des six rapports trigonométriques
  (iii) Déterminer l'angle de rotation en position standard
  (a) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$
  (b) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
  (c) $P(-5, 4)$

(T3.5, T3.6)

Journal

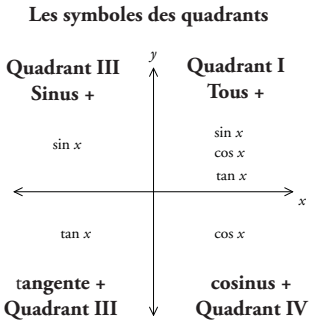
- Demander aux élèves de répondre à la question suivante :

  Donner un exemple d'équation trigonométrique qui n'a pas de solution. Expliquer.

(T3.4)

Performance

- Demander aux élèves de résumer ce qu'ils ont appris sur la position des rapports trigonométriques positifs et négatifs dans les quatre quadrants. Ils devraient utiliser un organisateur graphique comme :



Les élèves pourraient faire la même chose pour les rapports inverses.

(T3.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.3 Les rapports trigonométriques

MÉ: pp. 191-205

GE: pp. 102-107

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T3 Suite ...

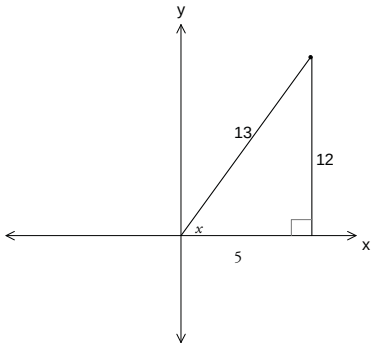
Indicateurs de rendement:

T3.7 *Déterminer, à partir de la valeur d'un rapport trigonométrique dans un domaine particulier, les valeurs exactes des autres rapports trigonométriques.*

T3.8 *Résoudre un problème à l'aide des rapports trigonométriques.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

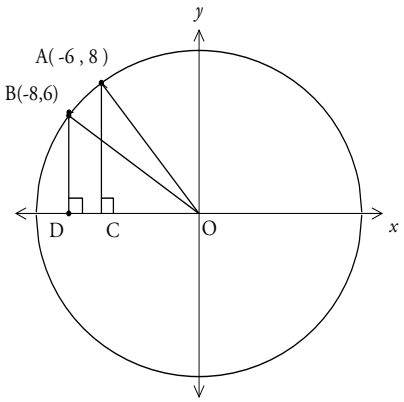
Les élèves ont déjà eu à trouver les deux autres rapports trigonométriques de base à partir d'un d'entre eux. Ils feront maintenant la même chose avec les rapports trigonométriques réciproques. Étant donné cos $x = \frac{5}{13}$, par exemple, ils pourraient être invités à déterminer la valeur de cosec x pour $0° \leq x \leq 90°$. Ils devraient être encouragés à dessiner un croquis similaire à celui ci-dessous pour les aider à visualiser une solution.



Les élèves devraient travailler avec des cas de domaines variés, y compris des valeurs négatives.

Pour prouver une compréhension approfondie des rapports trigonométriques et de l'utilisation des angles trigonométriques (T1) les élèves peuvent trouver la distance entre deux points donnés sur un cercle. Un exemple comme le suivant peut être utilisé :

Les élèves pourraient être invités à trouver la longueur de l'arc entre les points A(−6, 8) et B(−8,6).



En utilisant A(−6,8): $\tan \angle AOC = \frac{8}{6}$ $\therefore \angle AOD \doteq 53°$

En utilisant B(−8, 6): $\tan \angle BOD = \frac{6}{8}$ $\therefore \angle BOD \doteq 37°$

Cela donne , $\angle AOB \doteq 16°$ donc une longueur d'arc entre les points A et B de 2,8 unités.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Les élèves peuvent répondre à des questions comme :

  (i) Soit, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, $180° \leq \theta \leq 270°$, déterminer la valeur de cotan θ.

  (ii) Soit $\sec x = 5{,}5$, et $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, déterminer $\tan x$.

  (T3.7)

  (iii) Un dodécagone régulier (figure à douze côtés) est inscrit dans le cercle unitaire. Si un sommet est situé à (1,0), quelles sont les coordonnées exactes des autres sommets? Expliquez votre raisonnement.

  (T3.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.3 Les rapports trigonométriques

MÉ: pp. 191-205

GE: pp. 102-107

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.

[L, RP, R, T, V]

Indicateurs de rendement:

T5.1 *Déterminer algébriquement la solution d'une équation trigonométrique et exprimer, dans la mesure du possible, la solution sous forme exacte.*

T5.2 *Déterminer, à l'aide de la technologie, la solution approximative d'une équation trigonométrique.*

T5.3 *Vérifier, avec ou sans l'aide de la technologie, qu'une valeur donnée est une solution d'une équation trigonométrique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont résolu des équations trigonométriques simples de la forme $\sin\theta = a$ ou $\cos\theta = a$, où $-1 \leq a \leq 1$, et $\tan\theta = a$, où a est un nombre réel (T2). Ils ont travaillé avec des angles mesurés en degrés. Ils apprendront maintenant à faire la même chose avec les six rapports trigonométriques. Les élèves résoudront des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés ou en radians.

Pour résoudre des équations du premier degré, il sera parfois nécessaire de réarranger l'équation pour isoler le rapport trigonométrique. Lorsqu'ils résolvent une équation comme $\sec\theta = \sqrt{2}$, les élèves peuvent s'interroger sur l'angle de référence qui est obtenu lorsque l'hypoténuse est $\sqrt{2}$ et le côté adjacent est 1. Autrement, ils peuvent penser à utiliser la sécante comme la réciproque de cosinus et déterminer l'angle de référence pour l'équation $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La connaissance des valeurs exactes de sinus, de cosinus et de la tangente des angles de 30°, 45° ou 60°, ou des mesures correspondantes en radians, et la compréhension du cercle unitaire continueront d'être importantes pour résoudre des équations trigonométriques.

Les élèves résoudront aussi des équations du second degré à l'aide de techniques comme la factorisation (p. ex., $\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 = 0$, pour tout θ) ou les principes de l'isolement et de la racine carrée (p. ex., $\tan^2\theta - 3 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$). Les élèves utilisent parfois à tort la racine carrée principale quand la racine positive et la racine négative devraient toutes les deux être prises en considération. Dans l'équation $\tan^2\theta - 3 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, le fait d'isoler les rapports trigonométriques donne $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$. Les élèves doivent se rendre compte que l'utilisation de la racine carrée principale seulement dans cette équation fait en sorte qu'il manque une racine. Une autre erreur fréquemment commise par les élèves consiste à ne pas trouver toutes les solutions dans le domaine donné. Rappeler aux élèves de porter attention au domaine donné. Dans l'exemple ci-dessus, l'angle de référence est $\frac{\pi}{3}$ et comme il y a deux cas à prendre en considération (la tangente étant négative et positive), il existe des solutions dans chacun des quatre quadrants.

Les élèves devraient être encouragés à vérifier leurs solutions avec une calculatrice ou en utilisant le cercle unitaire, le cas échéant. Lorsqu'ils travaillent sur des équations contenant des rapports réciproques, les élèves devraient aussi vérifier que leurs solutions se situent dans le domaine.

Dans le prochaine module, Les fonctions trigonométriques et leur graphique, les élèves résoudront des équations trigonométriques pour lesquelles l'argument peut comprendre un étirement horizontal ou une translation horizontale, comme $\cos(2\theta - \pi) = -\frac{1}{2}$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de résoudre les équations trigonométriques suivantes :

  (i) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$
  (ii) 4 cotan θ + 3 = -2 cotan θ - 8; θ ∈ (0, 360°)
  (iii) 2 $\text{cosec}^2\theta$ - 8 = 0; pour tout θ en radians.
  (iv) 5 $\sec^2 x$ = 1- sec x; pour tout x en radians.
  (v) 2 $\sin^2 x$ + 5 sin x - 3 = 0; $x \in (-\pi, 2\pi)$

  (T5.1, T5.2)

- Soit $g(\theta) = \cos^2\theta - 3$ et $p(\theta) = 2\cos\theta$, demander aux élèves de déterminer les valeurs de θ telles que $g(\theta) = p(\theta)$, où $\theta \in [0, 4\pi]$.

  (T5.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.4 Une introduction aux équations trigonométriques

MÉ: pp. 206-214

GE: pp. 108-111

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T5 Suite ...

Indicateur de rendement:

T5.4 *Identifier et corriger toute erreur dans la solution d'une équation trigonométrique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont eu à identifier et corriger des erreurs tout au long de leur cheminement mathématique. Cette approche se poursuit dans le contexte de la résolution d'équations trigonométriques.

Les élèves devraient être encouragés à vérifier l'ensemble de la solution donnée et à ne pas s'arrêter à la première erreur trouvée. La solution suivante, par exemple, contient deux erreurs : la première erreur découle de l'application incorrecte du principe du produit nul et la deuxième erreur vient de ce que toutes les solutions n'ont pas été trouvées pour le domaine donné.

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0,\ 0 \le \theta < 360°$$

$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = -1$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \theta = \cos^{-1}(-1)$$

$$\therefore \theta = 60°, 180°$$

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Observation

- Mettre en place des tables sur lesquelles sont posés des exemples d'équations trigonométriques résolues de manière erronée. Les élèves doivent se déplacer d'une table à l'autre, trouver les erreurs et les corriger. Des exemples sont fournis ci-dessous :

(i) $4\sin^2 x - 2 = 0,$ pour tout x en radians

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{ref}\angle = \frac{\pi}{4}$

Quadrant I: $\frac{\pi}{4}$

Quadrant II: $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in I \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in I \end{cases}$$

(ii) $2\tan^2 x - 5\tan x - 3 = 0,\ -360° \le x \le 360°$

$(\tan x - 3)(2\tan x + 1) = 0$

$\tan x = 3$	$\tan x = -\dfrac{1}{2}$
$\text{ref}\angle \doteq 71,6°$	$\text{ref}\angle \doteq 26,6°$
Quadrant I : 71,6°	Quadrant II : 153,4°
Quadrant III : 251,6°	Quadrant IV : 333,4°

$x = 71,6°, 153,4°, 251,6°, 333,4°$

(T5.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

4.4 Une introduction aux équations trigonométriques

MÉ: pp. 206-214

GE: pp. 108-111

Les fonctions trigonométriques et leur graphique

Durée suggérée: 12 heures

Aperçu du module

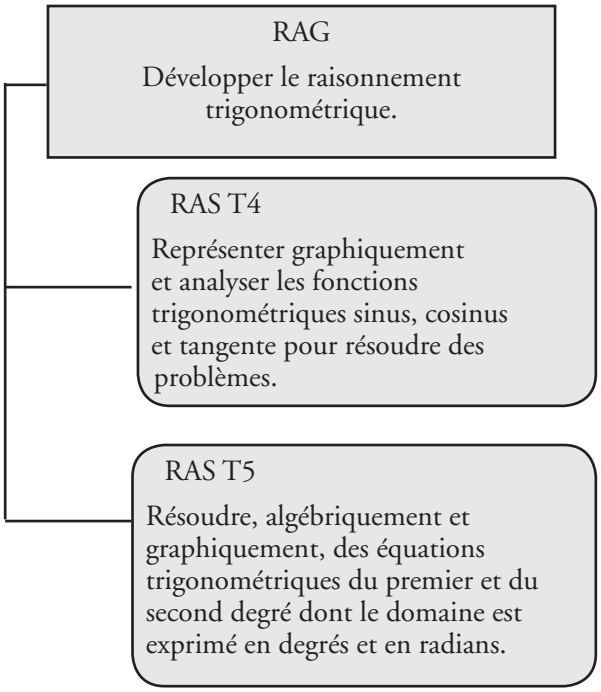
Orientation et contexte

Dans ce module, les élèves dessineront les graphiques de $y = \sin x$ et $y = \cos x$ et détermineront leurs caractéristiques, y compris la période, l'amplitude, le maximum, le minimum, les coordonnées à l'origine, le domaine et l'image. Ils étudieront aussi les effets des transformations sur ces graphiques.

Une fois qu'ils auront abordé chacune de ces fonctions, ils détermineront des fonctions trigonométriques pour modéliser des situations du monde réel et résoudre des problèmes.

Les élèves doivent dessiner le graphique de $y = \tan x$ et déterminer le domaine, l'image, la période, les asymptotes et les coordonnées à l'origine.

Cadre des résultats d'apprentissage



Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
La trigonométrie		
M4. Développer et appliquer les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus, tangente) pour résoudre des problèmes comportant des triangles rectangles. [C, L, RP, R, T, V]	T1. Démontrer une compréhension des angles en position standard [0° à 360°]. [R, V] T2. Résoudre des problèmes comportant les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus et tangente) pour des angles de 0° à 360° en position standard. [C, CE, RP, R, T, V] T3. Résoudre des problèmes à l'aide de la loi du cosinus et la loi des sinus, y compris le cas ambigu. [C, L, RP, R, T]	T4. Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes. [L, RP, T, V] T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians. [L, RP, R, T, V]

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T4 Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.

[L, RP, T, V]

Indicateurs de rendement:

T4.1 *Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique de $y = \sin x$ et $y = \cos x$.*

T4.2 *Déterminer les caractéristiques (l'amplitude, le domaine, la période, l'image et les zéros) du graphique de $y = \sin x$ et $y = \cos x$.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 1231, les élèves ont vu pour la première fois les trois rapports trigonométriques de base (M4). Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont appris à considérer les angles comme des rotations et à résoudre des équations trigonométriques simples en degrés. Ils ont aussi représenté graphiquement des fonctions réciproques (de fonctions linéaires et quadratiques seulement) et acquis une compréhension des asymptotes. Plus tôt dans le cours Mathématiques 3230, les élèves ont travaillé avec des mesures en radians et le cercle unitaire et ils ont résolu des équations trigonométriques d'une complexité accrue (T1, T2, T3, T5).

Dans le module précédent, les élèves ont déterminé les valeurs de sin x et cos x pour diverses mesures d'angle en degrés et en radians. Ils ont aussi étudié le cercle unitaire. Dans ce module, les élèves développeront les graphiques de $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, et plus tard, $y = \tan(x)$, et ils détermineront les caractéristiques de chacun. Ils effectueront des transformations sur $y = \sin(x)$ et $y = \cos(x)$ et les utiliseront pour modéliser et résoudre des problèmes. Les élèves n'ont pas besoin à transformer $y = \tan(x)$ ni à résoudre des problèmes comportant la tangente.

Les élèves peuvent utiliser les valeurs du cercle unitaire pour tracer $(\theta, \cos\theta)$ et $(\theta, \sin\theta)$ sur l'intervalle $x \in [0, 2\pi]$. Ils peuvent vérifier leurs résultats à l'aide de la technologie graphique.

Attirer l'attention des élèves sur les cinq points importants présents dans chaque graphique, car ces points permettent de déterminer les caractéristiques du graphique (amplitude, domaine, période, image et zéros) et serviront aussi à appliquer des transformations au graphique.

$y = \sin(x)$:

0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
0 l'axe d'oscillation	1 maximum	0 l'axe d'oscillation	-1 minimum	0 l'axe d'oscillation

$y = \cos(x)$:

0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
1 maximum	0 l'axe d'oscillation	-1 minimum	0 l'axe d'oscillation	1 maximum

Les cinq points importants donnent le squelette de chaque graphique de base dans l'intervalle de 0 à 2π, (une période complète) avec des points espacés d'un quart de période. Les élèves doivent apprendre à utiliser les motifs pour compléter le squelette et esquisser le graphique. Leurs graphiques devraient montrer la nature périodique et continue des graphiques de fonctions sinusoïdales. Pour ce faire, les élèves doivent représenter plus d'une période. En plus des caractéristiques énumérées, les élèves doivent aussi déterminer les maximums et minimums locaux et l'équation de l'axe d'oscillation, parfois appelé l'axe central horizontal.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de créer un diagramme de Venn pour comparer les caractéristiques des fonctions $y = \sin(x)$ and $y = \cos(x)$.

(T4.2)

Entrevue

- Demander aux élèves de montrer si le point $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ fait partie du graphique de $y = \sin(x)$. Leur demander si le même point fait partie du graphique de $y = \cos(x)$.

(T4.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

5.1 Le graphique des fonctions sinus et cosinus

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 222-237

Guide d'enseignement (GE): pp. 118-123

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T4 Suite ...

Indicateurs de rendement:

T4.3 *Déterminer l'effet de la variation de la valeur de a sur les graphiques de y = a sin x et y = a cos x.*

T4.4 *Déterminer l'effet de la variation de la valeur de b sur les graphiques de y = sin bx et y = cos bx.*

T4.5 *Déterminer l'effet de la variation de la valeur de d sur les graphiques de y = sin x + d et y = cos x + d.*

T4.6 *Déterminer l'effet de la variation de la valeur de c sur les graphiques de y = sin (x + c) et y = cos (x + c).*

T4.7 *Esquisser, sans l'aide de la technologie, le graphique de* $y = a\cos b(x-c)+d$ *et* $y = a\cos b(x-c)+d$ *à l'aide de transformations et expliquer les stratégies.*

T4.8 *Déterminer les caractéristiques (l'amplitude, le domaine, la période, le changement de phase, l'image et les zéros) du graphique d'une fonction trigonométrique de la forme* $y = a\cos b(x-c)+d$ *et* $y = a\cos b(x-c)+d$ *.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont appris à utiliser les transformations sur les graphiques de la form $y = af(b(x - h)) + k$ dans le module les transformations de fonctions. Ils appliqueront maintenant ces connaissances à des graphiques de fonctions sinusoïdales. Ils doivent remarquer que les paramètres h et k sont maintenant appelés c et d. Les élèves doivent déterminer la position des cinq points importants après la transformation, puis compléter le graphique correspondant.

Les élèves doivent savoir quelles caractéristiques du graphique sont modifiées par chaque paramètre. Pour ce faire, ils doivent étudier l'effet de chaque paramètre sur le graphique en modifiant un paramètre à la fois, et observer l'effet de ces changements sur les caractéristiques déterminantes des graphiques sinusoïdaux. Par exemple, le fait de modifier la valeur de a change l'amplitude du graphique, et les valeurs négatives causent une réflexion dans l'axe des x. Ces expériences peuvent être réalisées efficacement à l'aide de la technologie graphique et pourraient être réalisées dans le cadre d'une étude guidée des paramètres.

Veiller à ce que les élèves travaillent avec des valeurs non entières de ces paramètres, car dans de nombreux cas d'application dans le monde réel les valeurs ne sont pas entières. Les élèves devraient travailler avec des valeurs négatives pour a et b, mais l'accent étant mis sur des valeurs positives.

Les élèves devraient être en mesure de déterminer les caractéristiques d'une fonction trigonométrique à partir de la valeur des paramètres de l'équation sans être obligés de la représenter graphiquement. L'accent devrait être mis sur l'établissement de liens entre les connaissances des élèves sur les transformations et la terminologie des fonctions sinusoïdales, et non sur la mémorisation de formules. Plutôt que d'apprendre par cœur que la période = $\frac{2\pi}{|b|}$, par exemple, les élèves devraient comprendre que b influence l'étirement horizontal, et que la période du graphique sinusoïdal de base est de 2π.

Les élèves devraient savoir grâce à le module sur les transformations de fonctions que le paramètre c concerne la translation horizontale. Dans le cadre des fonctions sinusoïdales, c'est ce qu'on nomme un déphasage; c'est ce qui détermine la translation horizontale des 5 points importants.

Les élèves doivent être encouragés à utiliser le langage mathématique approprié. Ils doivent comprendre les termes déphasage et déplacement vertical, et savoir qu'ils désignent respectivement une translation horizontale et verticale.

Les élèves doivent aussi analyser des fonctions sinusoïdales où il est nécessaire d'utiliser la factorisation. La fonction $y = \sin(4x - 6\pi)$, par exemple, doit être factorisée vers la forme $y = \sin 4\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$ pour permettre de déterminer correctement le déphasage.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Performance

- Pour la fonction $y = a \sin b(x - c) + d$, les paramètres a, b, c, et d sont choisis au hasard (cartes, dés, etc.). Les élèves s'affrontent en équipe pour être les premiers à déterminer les cinq points importants.

  Autrement, ils peuvent être invités à déterminer la période ou une autre caractéristique de la fonction.

  (T4.3 à T4.8)

- Pour l'activité *Casse-tête*, les élèves sont répartis dans des groupes de départ et chacun reçoit un numéro de 1 à 4. Les groupes se dissolvent et les élèves ayant le même numéro se rassemblent en groupes d'experts. Chaque groupe d'experts étudie un type de transformation différent de $y = \sin x$ et $y = \cos x$. Une fois leur travail terminé, les élèves retournent à leurs groupes de départ. Chaque expert enseigne aux autres membres de son groupe ce qu'il a appris sur la transformation étudiée.

  T4.3 à T4.6)

Papier et crayon

- Chaque élève reçoit l'équation de deux fonctions sinusoïdales (par exemple, $y = 3\sin(2(x - 30°)) + 6$ et $y = -4\cos(2(x - 60°)) + 6$) et doit décrire en quoi elles sont semblables et en quoi elles diffèrent.

  (T4.3 à T4.8)

Entrevue

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes pour la courbe $y = 5\cos3(x - 30°) + 2$:
  - (i) Quelle est la période?
  - (ii) Quelle est l'amplitude?
  - (iii) Quel est l'image?
  - (iv) Supposons que nous voulions écrire l'équation sous la forme $y = a \sin b(x - c) + d$. Quelles valeurs pourraient être utilisées pour a, b, c et d?
  - (v) Comment l'équation pourrait elle être modifiée pour que la fonction résultante n'ait pas d'abscisses à l'origine?

  (T4.3 à T4.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

5.1 Le graphique des fonctions sinus et cosinus

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 222-237

Guide d'enseignement (GE): pp. 118-123

Lien Internet

www.desmos.com

Cette calculatrice graphique en ligne peut être utilisée pour représenter graphiquement des fonctions, tracer des tables de données, évaluer des équations et étudier les transformations.

[en anglais seulement]

5.2 Les transformations de fonctions sinusoïdales

MÉ: pp. 238-255

GE: pp. 124-129

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T4 Suite ...

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Indicateurs de rendement:

T4.9 *Déterminer les valeurs de a, b, c et d de fonctions de la forme* $y = a \sin b(x - c) + d$ *et* $y = a \cos b(x - c) + d$ *correspondant à un graphique donné et écrire l'équation de la fonction.*

Pour déterminer l'équation d'une fonction sinusoïdale, les élèves doivent déterminer les caractéristiques importantes du graphique, puis les relier aux paramètres de l'équation. Par exemple, s'ils déterminent que le graphique a une amplitude de 4, ils doivent se rendre compte que $a = 4$.

Même s'il existe un nombre infini d'options correctes pour le déphasage, par convention la plus petite valeur positive est celle qui est utilisée. Les enseignants doivent faire attention d'accepter toutes les bonnes réponses et non seulement la réponse conventionnelle lorsqu'ils corrigent le travail des élèves. Les élèves doivent être informés du fait qu'il existe plus d'une équation correcte et ils devraient être en mesure d'identifier les équations qui produisent le même graphique.

Les élèves doivent être mis en garde par rapport à l'utilisation de valeurs négatives pour a et b, car elles se traduisent par une réflexion. Par conséquent, lorsqu'ils déterminent la valeur du déphasage, ils doivent prendre en considération plusieurs points du graphique.

T4.10 *Résoudre un problème en ayant recours à l'analyse du graphique d'une fonction trigonométrique.*

Les fonctions trigonométriques sont couramment utilisées pour modéliser des problèmes de nature périodique, y compris les mouvements circulaires, le fonctionnement de pistons, les marées, le climat, les heures de lumière, les populations, l'électricité, etc.

T4.11 *Expliquer le lien entre les caractéristiques du graphique d'une fonction trigonométrique et les conditions d'une situation problématique.*

Les élèves devraient être encouragés à dessiner des croquis bien étiquetés des graphiques correspondants aux problèmes. Cela les aidera à déterminer les caractéristiques de la fonction trigonométrique plus facilement. Même si les élèves doivent être capables d'écrire une équation sinus ou cosinus pour modéliser n'importe quelle application, la fonction cosinus est celle qui est la plus souvent utilisée, car elle permet de déterminer le déphasage plus facilement. Les élèves sont libres de choisir l'équation appropriée de leur choix pour résoudre le problème.

T4.12 *Déterminer une fonction trigonométrique qui modélise une situation pour résoudre un problème.*

Les enseignants doivent être attentifs au type de questions d'évaluation qu'ils utilisent. Les questions faisant appel à la technologie graphique devraient être abordées en cours, mais pas dans les évaluations formelles.

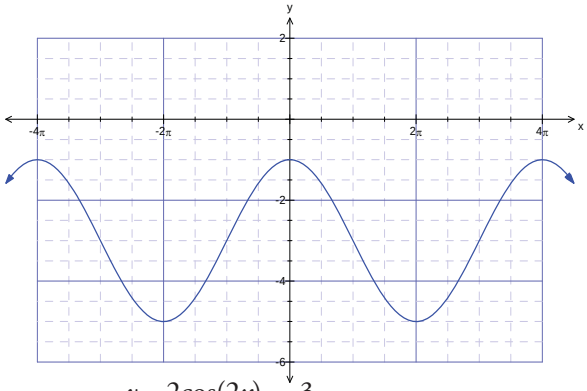
Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Journal

- On peut donner aux élèves le graphique et l'équation d'une fonction sinusoïdale. Leur demander de déterminer si l'équation est celle du graphique. Sinon, ils doivent expliquer comment l'équation devra être modifiée.

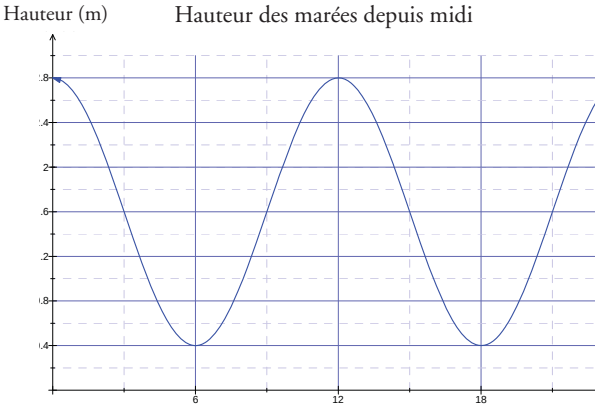
  Exemple:



$y = 2\cos(2x) - 3$

(T4.8, T4.9)

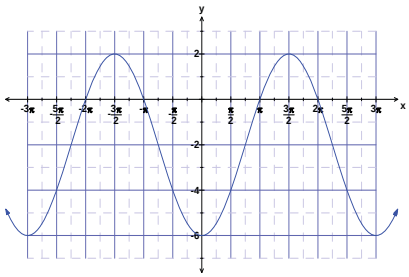
- On peut donner aux élèves un graphique représentant un problème et leur demander de déterminer quelles réponses le graphique permet de trouver.



(T4.10, T4.11)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer les valeurs de *a, b, c* et *d* nécessaires pour écrire l'équation du graphique.



(T4.8, T4.9)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

5.2 Les transformations de fonctions sinusoïdales

MÉ: pp. 238-255

GE: pp. 124-129

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T4 Suite ...

Indicateurs de rendement:

T4.13 *Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique de y = tan x.*

T4.14 *Déterminer les caractéristiques (les asymptotes, le domaine, la période, l'image et les zéros) du graphique de y = tan x.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Même si les élèves ont été initiés à la notion d'une ligne tangente en 9e année, un rappel pourrait être utile avant de voir le graphique de $y = \tan x$.

Les élèves doivent développer le graphique de $y = \tan(x)$, en prêtant attention à ses caractéristiques. Comme pour le graphique du sinus et du cosinus, on utilise habituellement 5 points importants (trois points et deux asymptotes) pour représenter graphiquement une période complète de $y = \tan(x)$:

$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
asymptote	-1	0	1	asymptote

Comme pour le sinus et le cosinus, faire en sorte que les élèves réalisent que ces points importants guident la représentation d'une période de la fonction et qu'ils devraient être capables de les utiliser pour esquisser des graphiques raisonnablement précis. Les graphiques devraient représenter plus d'une période.

Lancer une discussion à savoir si le graphique de $y = \tan(x)$ comporte une amplitude. Il peut être utile pour les élèves de constater que l'amplitude est une caractéristique des graphiques du sinus et du cosinus, et qu'elle dépend de la présence d'un minimum et d'un maximum. Comme il n'y a ni minimum ni maximum dans la fonction $y = \tan(x)$, il ne peut pas y avoir d'amplitude.

Une discussion similaire pourrait être lancée pour aider les élèves à comprendre pourquoi la période de $y = \tan(x)$ est π.

À noter, les transformations de $y = \tan(x)$ ne seront pas étudiées dans ce cours.

Quand on discute du comportement de la fonction près des asymptotes, il est important de se rappeler que les élèves n'ont jamais officiellement vu les limites, la notation des limites ou de l'infini. Demander aux élèves d'analyser la pente du côté terminal sur le cercle unitaire dans une rotation de 0° à 90°.

- Quand la pente est-elle de 0?
- Que se passe-t-il à mesure que l'angle augmente?
- Qu'arrive-t-il à la pente à mesure que l'angle approche de 90°?
- Quelle est la pente à 90°?

Poser les mêmes questions aux élèves pour une rotation de 0° à –90°. Leur demander de comparer les pentes une fois que le côté terminal a dépassé 90°. Ils devraient se rendre compte de la nature périodique de la courbe et de son comportement autour des asymptotes.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de tracer les graphiques de $y = \sin(x)$ et $y = \tan(x)$ dans le même plan cartésien.

  Ils doivent expliquer la relation entre les abscisses à l'origine de $y = \sin(x)$ et celles de $y = \tan(x)$.

  (T4.13, T4.14)

- Demander aux élèves de tracer les graphiques de $y = \cos(x)$ et de $y = \tan(x)$ dans le même plan cartésien.

  Ils doivent expliquer la relation entre les abscisses à l'origine de $y = \cos(x)$ et les asymptotes de $y = \tan(x)$.

  (T4.13, T4.14)

Entrevue

- Demander aux élèves si $x = 3\pi$ fait partie du domaine de $y = \tan(x)$.

  (T4.14)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

5.3 La fonction tangente

MÉ: pp. 256-265

GE: pp. 130-133

Note

MÉ: p. 263, no.5 à no.7

Ces questions visent à approfondir la relation entre $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et la pente du côté terminal, ce qui cadre bien avec le module sur la trigonométrie et le cercle unitaire.

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.

[L, RP, R, T, V]

Indicateurs de rendement:

T5.1 *Déterminer algébriquement la solution d'une équation trigonométrique et exprimer, dans la mesure du possible, la solution sous forme exacte.*

T5.2 *Déterminer, à l'aide de la technologie, la solution approximative d'une équation trigonométrique.*

T5.3 *Vérifier, avec ou sans l'aide de la technologie, qu'une valeur donnée est une solution d'une équation trigonométrique.*

T5.5 *Établir le lien entre la solution générale d'une équation trigonométrique et les zéros de la fonction trigonométrique correspondante (se limiter aux fonctions sinus et cosinus).*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont résolu des équations quadratiques en traçant la fonction quadratique correspondante et en déterminant les abscisses à l'origine (RF3, RF4). Ils ont aussi résolu des systèmes d'équations (quadratique-quadratique et quadratique-linéaire) graphiquement et algébriquement (RF6).

Dans le module précédent, les élèves ont résolu algébriquement des équations trigonométriques du premier et du second degré. Dans ce module, ils continuent de résoudre des équations algébriquement. Ils utilisent aussi les graphiques des fonctions trigonométriques pour résoudre des équations. Aux fins d'évaluation, les élèves doivent analyser des graphiques donnés pour déterminer des solutions.

Les élèves résolvent aussi des équations trigonométriques dans lesquelles l'argument peut comprendre un étirement horizontal ou une translation horizontale.

Pour déterminer algébriquement toutes les solutions de $\cos\left[4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ en radians les élèves pourraient procéder comme suit :

$$\text{Ref } \angle : \theta_R = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Quadrant II}: \ \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Quadrant III}: \ \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in I\\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in I\end{cases}$$

$$x-\frac{\pi}{2}=\begin{cases}\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n, n\in I\\ \frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n, n\in I\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}\frac{17\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in I\\ \frac{19\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in I\end{cases}$$

Il faut rappeler aux élèves de vérifier leurs solutions en évaluant chaque côté de l'équation originale pour toutes les valeurs des solutions trouvées.

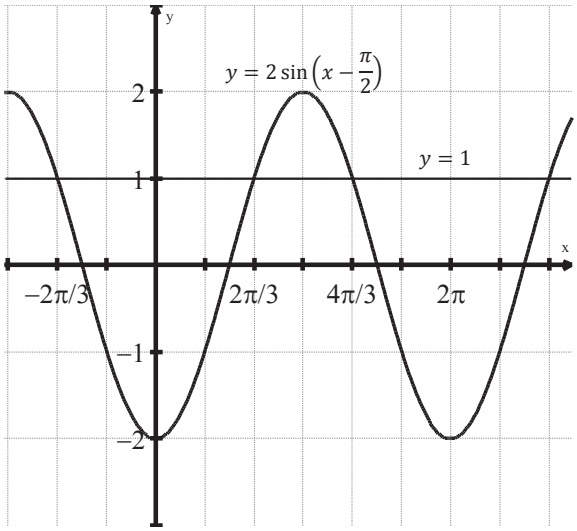
Discuter de l'effet d'un étirement horizontal a sur le domaine restreint. Par exemple, pour résoudre l'équation $\sin 3x = 1$, $0 \leq x < 2\pi$, les élèves doivent d'abord trouver toutes les solutions possibles pour 3x. Le domaine restreint serait $0 \leq 3x < 6\pi$, ce qui donne $3x=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- À l'aide du graphique ci-dessous, demander aux élèves de déterminer la solution générale pour $2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1=0$.



(T5.5)

- Demander aux élèves de déterminer combien il y a de solutions à l'équation $3\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2$ sur l'intervalle $x \in [-\pi, 2\pi]$.

(T5.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

5.4 Les applications des fonctions trigonométriques

MÉ: pp. 266-281

GE: pp. 134-138

Les identités trigonométriques

Durée suggérée: 15 heures

Aperçu du module

Orientation et contexte

Dans ce module, les élèves verront certaines relations trigonométriques qui sont toujours vraies et d'autres qui ne sont vraies que pour des valeurs données de l'angle. Dans ce contexte, les élèves pourront faire la preuve de certaines relations trigonométriques et trouver des solutions algébriques à des équations trigonométriques. Les élèves auront aussi à simplifier des expressions trigonométriques..

Cadre des résultats d'apprentissage

RAG

Développer le raisonnement trigonométrique.

RAS T6

Démontrer des identités trigonométriques, y compris :

- les identités inverses;
- les identités des quotients;
- les identités de Pythagore
- les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)
- les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)

RAS T5

Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.

Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
La trigonométrie		
M4. Développer et appliquer les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus, tangente)pour résoudre des problèmes comportant des triangles rectangles. [C, L, R, RP, T, V]	T1. Démontrer une compréhension des angles en position standard [0° à 360°]. [R, V] T2. Résoudre des problèmes comportant les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus et tangente) pour des angles de 0° à 360° en position standard. [C, CE, RP, R, T, V] T3. Résoudre des problèmes à l'aide de la loi du cosinus et la loi des sinus, y compris le cas ambigu. [C, L, RP, R, T]	T6. Démontrer des identités trigonométriques, y compris : • les identités inverses; • les identités des quotients; • les identités de Pythagore • les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) • les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V] T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians. [L, RP, R, T, V]

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T6. Démontrer des identités trigonométriques, y compris :

- **les identités inverses;**
- **les identités des quotients;**
- **les identités de Pythagore**
- les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)
- les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)

[**R, T, V**]

Indicateur de rendement:

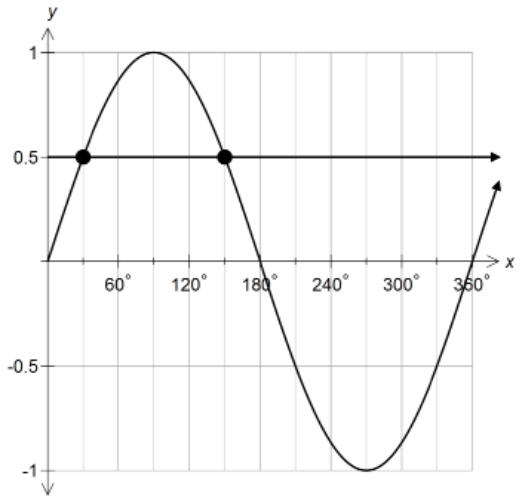
T6.1 *Expliquer la différence entre une identité trigonométrique et une équation trigonométrique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont déjà eu à représenter graphiquement des fonctions trigonométriques (T4) et à résoudre des équations trigonométriques (T5). Ils ont aussi été initiés aux rapports trigonométriques inverses (T3). Ils aborderont maintenant les identités trigonométriques, des équations trigonométriques qui sont vraies pour toutes les valeurs permises de la variable présente dans les expressions des deux membres de l'équation. Ils vérifieront des identités graphiquement et numériquement et en feront la preuve à l'aide des identités de Pythagore, des identités des quotients, des identités inverses, des identités de la somme ou de la différence et des identités de l'angle double.

Les élèves doivent être en mesure d'expliquer la différence entre une équation trigonométrique et une identité trigonométrique. Une identité est vraie pour toutes les valeurs permises, alors que l'équation n'est vraie que pour un sous-ensemble des valeurs permises. Cette différence peut être démontrée à l'aide de la technologie graphique.

Les élèves ont utilisé les graphiques des fonctions trigonométriques pour résoudre des équations. L'équation $\sin x = \frac{1}{2}$, par exemple, peut être résolue pour $0° \leq x < 360°$, à partir des graphiques de $y = \sin x$ et $y = \frac{1}{2}$:



Les solutions de $\sin x = \frac{1}{2}$ pour $0° \leq x < 360°$ sont $x = 30°$ et $x = 150°$, qui sont les valeurs de x des points d'intersection.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de répondre à la question suivante :

  Expliquez à un ami qui a manqué le cours d'aujourd'hui la différence entre une identité et une équation.

(T6.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée
Mathématiques pré-calcul 12

6.1 Les identités inverses, les identités des quotients et l'identité de Pythagore

Manuel de l'élève (MÉ):
pp. 290-298

Guide d'enseignement (GE):
pp. 146-149

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
T6 Suite ...

Indicateurs de rendement:

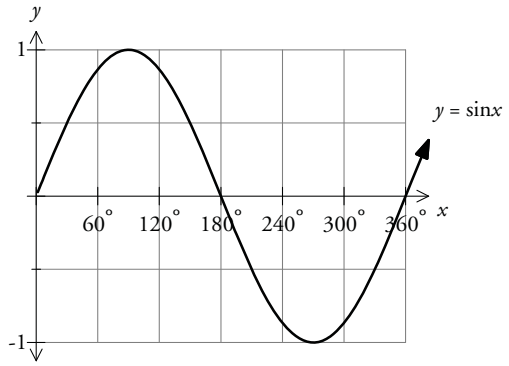
T6.1 *Suite*

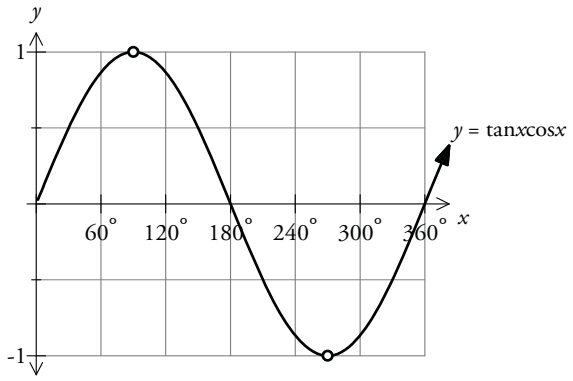
T6.2 *Déterminer la validité potentielle d'une identité trigonométrique graphiquement à l'aide de la technologie.*

T6.3 *Déterminer les valeurs non permises d'une identité trigonométrique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves peuvent ensuite travailler avec la relation sin x = tan x cos x. Ils devraient remarquer que lorsqu'elles sont représentées graphiquement, y = sin x et y = tan x cos x sont pratiquement identiques :





Les seules différences entre les graphiques se trouvent aux points (90°, 1) et (270°, –1), qui sont des valeurs non permises de x. Par conséquent, sin x = tan x cos x est une identité puisque les expressions sont équivalentes pour toutes les valeurs permises.

Les élèves doivent discuter de la raison pour laquelle les identités ne sont pas équivalentes à certains points. Les valeurs non permises des identités se produisent lorsqu'une des expressions n'est pas définie. Dans l'exemple ci-dessus, y = tan x cos x n'est pas définie pour $x = 90° + 180°n$, $n \in$ I puisque y = tan x n'est pas définie à ces valeurs. Les élèves doivent se rendre compte qu'il existe souvent des valeurs non permises quand une expression trigonométrique contient :

- une expression rationnelle, quand les valeurs donnent un dénominateur de zéro
- tangente, cotangente, sécante ou cosécante, puisque ces expressions ont toutes des valeurs non permises dans leur domaine.

Les élèves doivent déterminer les valeurs non permises de manière graphique et algébrique.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer graphiquement si les expressions suivantes sont des identités. Ils doivent déterminer les valeurs non permises.
  (i) $\sin\theta + \cos\theta \tan\theta = 2\sin\theta$
  (ii) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
  (iii) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sec\theta$

(T6.1, T6.2, T6.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.1 Les identités inverses, les identités des quotients et l'identité de Pythagore

MÉ: pp. 290-298

GE: pp. 146-149

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
T6 Suite ...

Indicateurs de rendement:

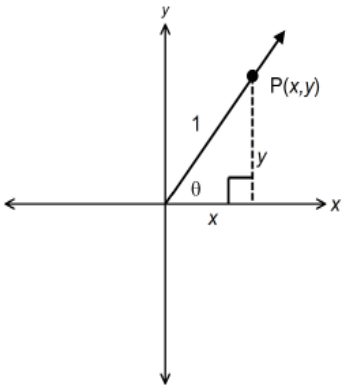
T6.4 *Vérifier une identité trigonométrique numériquement pour une valeur donnée en degrés ou en radians.*

T6.5 *Démontrer la validité d'une identité trigonométrique algébriquement.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent également vérifier numériquement que l'identité est valable (vrai) en introduisant des valeurs numériques des deux membres de l'équation. Les élèves devraient utiliser des mesures d'angle en degrés et en radians.

Pour présenter les identités de Pythagore, on peut donner aux élèves l'expression $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ et leur demander de substituer des valeurs différentes pour θ. Ils devraient conclure par induction que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pour toutes les valeurs de θ. Discuter avec eux du fait que cette approche ne suffit pas à conclure que l'équation est une identité, parce qu'on a remplacé θ, par un nombre limité de valeurs et qu'il pourrait exister certains groupes de valeurs pour lesquels l'identité ne fonctionnerait pas. Cette discussion devrait conduire au concept de preuve (démontrer) - un argument déductif utilisé pour montrer la validité d'un énoncé mathématique. Pour démontrer que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, le cercle unitaire (T2), les définitions de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ (T2), et le théorème de Pythagore peuvent être utilisés :



Encourager les élèves à utiliser la notation du membre de gauche et du membre de droit le cas échéant :

$$\begin{aligned} \text{M.G.} &= \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ &= (y)^2 + (x)^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \\ &= \text{M.D.} \end{aligned}$$

À l'aide de l'identité ci-dessus, des identités inverses et des identités des quotients, les élèves doivent dériver les deux autres identités de Pythagore ($1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ et $\text{cotan}^2\theta + 1 = \text{cosec}^2\theta$) et déterminer les valeurs non permises. Ils doivent vérifier l'identité de façon numérique et en faire la preuve mathématique.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de déterminer si $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ est une identité et de justifier leur réponse à l'aide de la vérification numérique ou graphique.

(T6.1, T6.2, T6.3, T6.4)

Entrevue

- Demander aux élèves d'expliquer si $\sin \theta + \cos \theta = 1$ sachant que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

(T6.3, T6.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.1 Les identités inverses, les identités des quotients et l'identité de Pythagore

MÉ: pp. 290-298

GE: pp. 146-149

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
T6 Suite ...

Indicateur de rendement:

T6.6 *Simplifier des expressions trigonométriques en utilisant les identités trigonométriques*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent aussi simplifier des expressions en utilisant les identités de Pythagore, les identités inverses et les identités des quotients. Discuter de stratégies particulières que pourraient utiliser les élèves pour commencer à simplifier :

- Remplacer une expression au carré par une identité de Pythagore
- Ecrire l'expression en fonction du sinus ou du cosinus
- Pour les expressions comportant des additions ou des soustractions, il peut être nécessaire d'utiliser un dénominateur commun pour simplifier une fraction

Rappeler aux élèves de déterminer les valeurs non permises de la variable de l'expression. On pourrait par exemple demander aux élèves de déterminer les valeurs non permises de θ dans, $\sin\boldsymbol{\theta}\ \cos\boldsymbol{\theta}\ \text{cotan}\boldsymbol{\theta}$, puis de simplifier l'expression.

Les élèves trouvent souvent la simplification des expressions trigonométriques plus difficile que la démonstration des identités trigonométriques, car ils ne savent pas toujours quand une expression a été simplifiée autant que possible. Le fait d'acquérir une bonne base dans la simplification d'expressions rend la transition vers la démonstration des identités trigonométriques plus facile.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de simplifier $\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ et de déterminer les valeurs non permises.

(T6.3, T6.6)

Journal

- Demander aux élèves de répondre à la question suivante :

  Dans un de vos devoirs, la réponse d'un problème est *sec x cosec x.* Vous et votre ami obtenez des réponses différentes. Laquelle est exacte? Justifiez votre réponse.

  (i) $\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

  (ii) cotan x + tan x

(T6.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.1 Les identités inverses, les identités des quotients et l'identité de Pythagore

MÉ: pp. 290-298

GE: pp. 146-149

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T6 Démontrer des identités trigonométriques, y compris :

- les identités inverses;
- les identités des quotients;
- les identités de Pythagore
- **les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus**
- **les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)**

[R, T, V]

Indicateurs de rendement:

T6.7 *Déterminer la valeur exacte d'un rapport trigonométrique en ayant recours aux identités de la somme, de la différence et d'angle double.*

T6.2, T6.3, T6.4, T6.6
Suite

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Souvent, les relations trigonométriques comportent des mesures d'angle qui sont liées, soit parce qu'elles sont la somme d'autres angles ou la différence entre eux, ou le double d'autres angles. Dans ces cas, les élèves peuvent utiliser des formules pour évaluer les fonctions trigonométriques. Une fois initiés à celles-ci, ils doivent se rendre compte que l'avantage d'utiliser les formules de la somme ou de la différence ou la formule de l'angle double est qu'elles permettent d'exprimer les évaluations en valeurs exactes plutôt qu'en valeurs décimales approximatives. Les formules servent aussi à simplifier des expressions trigonométriques et à vérifier des identités.

Les élèves doivent travailler avec les identités de la somme et de la différence des rapports trigonométriques de base :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Après avoir travaillé avec les identités de la somme et de la différence, les élèves devraient voir les identités de l'angle double pour les rapports trigonométriques de base :

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Les identités devraient être vérifiées numériquement. Les enseignants peuvent présenter la dérivation de ces formules aux élèves, mais les preuves ne sont pas exigées lors de l'évaluation.

Les élèves doivent voir que les trois formules de $\cos 2a$ sont toutes équivalentes et qu'ils peuvent utiliser celle qui est la plus pratique pour résoudre un problème.

Les élèves font souvent l'erreur d'exprimer $\tan 2x$ sous forme de $2\tan x$ ou $\cos 2x$ sous forme de $2\cos x$. Veillez à ce que les élèves sachent que ces expressions ne sont pas équivalentes.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer la valeur exacte de ce qui suit :
  (i) $\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)$
  (ii) $\sin(255°)$

(T6.7)

- Étant donné $\cos\theta = \frac{7}{25}$ où $270° \leq \theta < 360°$, demander aux élèves de déterminer les valeurs exactes de $\tan(2\theta)$ et $\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$.

(T6.7)

Performance

- Demander aux élèves de déterminer si $\sin 2x = 2\sin x$ est une identité.

(T6.7)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.2 Les identités de la somme, de la différence et de l'angle double

MÉ: pp. 299-308

GE: pp. 150-153

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
T6 Suite ...

Indicateurs de rendement:

T6.2, T6.3, T6.4, T6.5 T6.6, T6.7 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les identités de la somme, de la différence et de l'angle double permettent de déterminer la valeur exacte des expressions trigonométriques. À l'aide de l'identité de l'angle double, les élèves doivent déterminer les rapports trigonométriques exacts pour des angles qui ne sont pas des multiples de 30° ou de 45°, mais qui sont des multiples de 15°. Ils pourraient déterminer algébriquement, par exemple, la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de tan145°. Les élèves doivent aussi utiliser ces formules pour trouver la valeur exacte d'expressions comme $\frac{\tan 80^\circ + \tan 55^\circ}{1-\tan 80^\circ \tan 55^\circ}$. Ils devraient réaliser que les identités de la somme et de la différence peuvent être appliquées dans les deux sens. Les élèves ignorent souvent que les identités de la somme et de la différence sont vraies qu'elles soient lues de gauche à droite ou de droite à gauche.

Les identités de la somme et de la différence et de l'angle double sont aussi nécessaires pour simplifier certaines expressions trigonométriques. Par exemple, l'expression $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$, peut être simplifiée à cotan x à l'aide de la formule de l'angle double appropriée pour cos $2x$. Demander aux élèves de déterminer algébriquement les racines non permises et de vérifier leur solution numériquement ou graphiquement. Pour trouver algébriquement les racines non permises, il faut résoudre 1- cos $2x \neq 0$. Les élèves peuvent :

- Substituer la formule de l'angle double appropriée et résoudre :

$$\begin{aligned} 1-\cos 2x &\neq 0 \\ 1-\left(1-2\sin^2 x\right) &\neq 0 \\ 2\sin^2 x &\neq 0 \\ \sin^2 x &\neq 0 \\ \sin x &\neq 0 \\ x &\neq \pi n,\ n \in I \end{aligned}$$

- Résoudre cos 2x $\neq$ 1, en prenant note de l'étirement horizontal de $\frac{1}{2}$, ce qui donne une période de π:

$$\begin{aligned} \cos 2x &\neq 1 \\ 2x &\neq 0 + 2\pi n,\ n \in I \\ x &\neq \pi n,\ n \in I \end{aligned}$$

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves d'utiliser des exemples numériques pour montrer que $\tan(x + y) \neq \tan x + \tan y$.

(T6.7)

Entrevue

- Les élèves peuvent travailler en équipes de deux pour prouver que $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$ de trois différentes manières, en utilisant une identité différente pour $\cos 2x$ dans chaque preuve. Leur demander de discuter de l'identité qu'ils ont trouvé la plus facile à utiliser et de prendre note des stratégies qu'ils ont apprises.

  L'enseignant interroge ensuite les équipes d'élèves pour observer leur niveau de compréhension et leur capacité à verbaliser des notions mathématiques. Poser des questions comme :

  (i) Quelle identité avez-vous utilisée en premier pour $\cos 2x$? Pourquoi l'avez-vous choisie?

  (ii) Quelle identité avez-vous trouvée la plus facile à utiliser?

  (iii) Quelles stratégies avez-vous apprises pour vous aider à choisir la meilleure identité pour $\cos 2x$ dans les preuves futures?

  Plutôt que d'interroger chaque élève sur chaque sujet, l'enseignant peut décider de sélectionner un échantillon d'élèves à interroger. Il devrait s'assurer que tous les élèves sont interrogés au final.

(T6.5)

Performance

- Préparer des cartes sur lesquelles figurent des étapes de la preuve d'une identité trigonométrique. Les élèves travaillent en petits groupes et décident de l'ordre logique dans lequel placer les cartes. Les élèves devraient discuter de leur opinion sur les séquences possibles en travaillant.

(T6.5)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de simplifier :

  (i) $\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{\sin 2x}$

  (ii) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

(T6.6, T6.7)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.2 Les identités de la somme, de la différence et de l'angle double

MÉ: pp. 299-308

GE: pp. 150-153

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
T6 Suite ...

Indicateurs de rendement:

T6.8 *Expliquer pourquoi la vérification de l'égalité entre les deux membres d'une identité trigonométrique pour des valeurs données ne suffit pas pour conclure que l'identité est valable.*

T6.3, T6.5 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent utiliser les identités inverses, les identités de Pythagore, les identités de la somme et de la différence et les identités de l'angle double pour démontrer d'autres identités trigonométriques. Pour démontrer une identité, il faut simplifier de façon indépendante chaque membre de l'identité pour obtenir des expressions identiques. Ils peuvent utiliser les stratégies suivantes pour valider une identité :

- écrire les expressions en fonction du sinus et du cosinus
- exprimer les fonctions trigonométriques données en termes d'une fonction trigonométrique unique
- factoriser les expressions, y compris les expressions comportant des facteurs communs, différence de carrés et des trinômes
- mettre les expressions sur un dénominateur commun
- développer une expression, par exemple en multipliant deux binômes ensemble
- écrire une fraction sous forme de deux fractions ou plus
- multiplier par le conjugué
- multiplier une expression par une fraction équivalente à 1

Les élèves doivent aussi se souvenir de déterminer les éventuelles racines non permises dans le cadre des preuves d'identités.

Pour l'identité $(1 + \text{cotan}^2 x)(1 - \cos 2x) = 2$, les racines non permises sont indiquées par $\sin x \neq 0$ ou $x \neq \pi n$, $n \in \text{I}$, puisque $\text{cotan}^2\, x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ Pour démontrer cette identité, encourager les élèves à commencer par le membre qui semble le plus compliqué. Cette preuve fait appel à la fois à une identité de Pythagore et à une identité de l'angle double. Pendant qu'ils travaillent sur cette preuve, demander aux élèves comment ils peuvent décider quelle forme des formules de l'angle double pour le cosinus est la plus appropriée. Ils doivent se rendre compte de l'importance de pouvoir exprimer les fonctions trigonométriques en termes d'une fonction unique.

Les élèves peuvent vérifier leur identité numériquement, mais leur rappeler que le fait de montrer qu'une identité est vraie pour certaines valeurs de x ne constitue pas une preuve, puisqu'il peut y avoir d'autres valeurs de x qui ne fonctionnent pas dans l'identité. Il s'agit cependant d'un indice de la validité de l'identité. Ils peuvent également vérifier le résultat graphiquement.

Les élèves devraient travailler sur des preuves qui exigent l'utilisation de plus d'une stratégie.

Dans certains cas, il est possible de simplifier indépendamment les deux membres d'une identité et d'arriver à une même expression. La preuve est alors validée par la propriété de transitivité.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de démontrer que les identités suivantes sont valides :

  (i) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

  (ii) $\dfrac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta$

  (iii) $1+\sin 2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

(T6.8)

- Demander aux élèves de vérifier graphiquement que $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$. Ils doivent déterminer les racines non permises et démontrer l'identité algébriquement.

(T6.3,T6.5,T6.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.3 Démontrer des identités

MÉ: pp. 309-315

GE: pp. 154-158

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

T5 Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.

[L, RP, R, T, V]

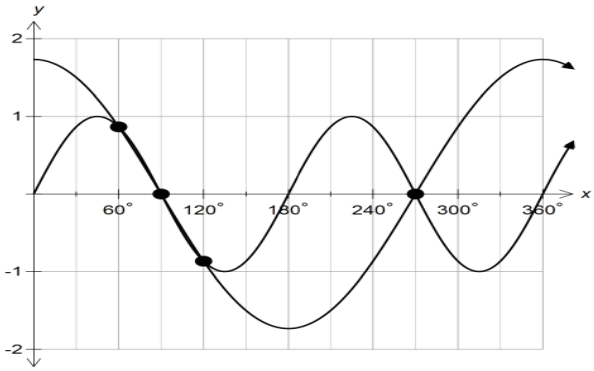
Indicateur de rendement:

T5.1 *Déterminer algébriquement la solution d'une équation trigonométrique et exprimer, dans la mesure du possible, la solution sous forme exacte.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves devraient se rappeler de la résolution d'équations trigonométriques vue dans le cours Mathématiques 2230 (T2) et plus tôt dans ce cours (T5). Les identités étudiées précédemment dans ce module (T6) peuvent maintenant être appliquées à la résolution d'équations trigonométriques.

Continuer de souligner le lien entre les solutions graphiques et les solutions algébriques des équations trigonométriques. On pourrait par exemple, demander aux élèves de trouver les solutions de $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$ quand $0° \le x < 360°$. Utiliser les graphiques de $y = \sin 2x$ et $y = \sqrt{3}\cos x$ avec le domaine $0° \le x < 360°$ pour montrer les intersections à 60°, 90°, 120° et 270°.



Une identité de l'angle double permet de résoudre la même équation de façon algébrique :

$$\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$$
$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$$
$$\cos x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$\cos x = 0$	$2\sin x - \sqrt{3} = 0$
$x = 90°, 270°$	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$x = 60°, 120°$

Les élèves doivent se rendre compte de la relation entre les solutions algébriques et les solutions graphiques.

Les élèves doivent aussi résoudre des équations trigonométriques dont le domaine n'est pas restreint qui donnent une solution générale, en degrés et en radians. Dans l'exemple précédent, avec un domaine non restreint, les solutions en radians sont $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in I$. Les élèves peuvent constater que quand le domaine est illimité il existe un nombre infini de solutions. Prolonger le graphique pour que les élèves voient plus de points d'intersection et solidifient leur compréhension des solutions générales.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de résoudre chacune des équations suivantes quand $0° \leq x \leq 360°$, en donnant les solutions exactes, si possible.

  (i) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$

  (ii) $\tan 2x = \frac{2}{\sec^2 x}$

  Demander aux élèves d'écrire la solution générale pour les équations ci-dessus en degrés et en radians.

  (T5.1, T5.2, T5.4)

- Demander aux élèves de résoudre $\cos 2x = \sin x$ graphiquement, et de vérifier les réponses numériquement.

  (T5.4, T5.3)

Journal

- Demandez aux élèves quelle identité devrait être utilisée pour remplacer $\cos 2x$ pour résoudre $1 - \cos 2x = \cos x$. Leur demander de justifier leur réponse et de résoudre l'équation pour le domaine $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

  (T5.1, T5.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.4 Résoudre des équations trigonométriques á l'aide d'identités

MÉ: pp. 316-321

GE: pp. 159-162

La trigonométrie

Résultats d'apprentissage spécifiques *L'élève doit pouvoir:* **T5 Suite ...**	Stratégies d'enseignement et d'apprentissage
Indicateurs de rendement: T5.3 *Vérifier, avec ou sans l'aide de la technologie, qu'une valeur donnée est une solution d'une équation trigonométrique.*	Les élèves doivent vérifier qu'une valeur particulière est une des solutions d'une équation trigonométrique en la plaçant simplement dans l'équation pour voir si elle fonctionne.
T5.2 *Déterminer, à l'aide de la technologie, la solution approximative d'une équation trigonométrique.*	Les élèves doivent aussi résoudre des équations trigonométriques avec des angles non remarquables. Pour ce faire, ils peuvent utiliser une calculatrice scientifique permettant de trouver la mesure en degrés ou en radians à l'aide de la fonction trigonométrique inverse d'un rapport. Par exemple, les élèves pourraient résoudre $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}7311$, pour le domaine $0° \leq x < 360°$. Les élèves doivent également fournir la solution générale d'une équation trigonométrique. Leur rappeler que la solution générale de l'équation ci-dessus comprend tous les angles qui sont coterminaux avec les solutions déjà trouvées.
T5.4 *Identifier et corriger toute erreur dans la solution d'une équation trigonométrique.*	La recherche d'erreur et leur correction est une bonne méthode de développement de compétences analytiques. On pourrait donner aux élèves un exemple comportant une erreur et leur demander de la trouver. $\sin^2 x - \sin x = 0$ $\sin^2 x = \sin x$ $\frac{\sin^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$ $\sin x = 1$ $x = 90°$ Dans ce cas, il manque une solution parce que les deux côtés de l'équation ont été divisés par $\sin x$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement trigonométrique.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- La solution trouvée par un élève pour $\tan^2 x = \sec x \tan^2 x$ pour $0 \leq x < \pi$ est représentée ci-dessous :

$$\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{\sec x \tan^2 x}{\tan^2 x}$$
$$1 = \sec x$$
$$x = 0,\ 2\pi$$

  Demander aux élèves de trouver la ou les erreurs et de les expliquer.

  (T5.1, T5.4)

- Demander aux élèves de résoudre $\cos 2x = 0{,}8179$ pour $0° \leq x \leq 360°$. Ils doivent aussi écrire la solution générale en radians et en degrés.

  (T5.2)

Journal

- Distribuer des demi-feuilles de papier ou des fiches et demander aux élèves de décrire « l'élément le plus compliqué » de la résolution d'équations trigonométriques. Ils devraient écrire toutes les notions ou les parties du cours qu'ils ont trouvées les plus difficiles à comprendre. Il s'agit d'une technique de vérification rapide qui permet de réagir aux éventuelles difficultés des élèves.

  (T5.1, T5.2, T5.3, T5.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

6.4 Résoudre des équations trigonométriques á l'aide d'identités

MÉ: pp. 316-321

GE: pp. 159-162

Les fonctions exponentielles

Durée suggérée: 12 heures

Aperçu du module

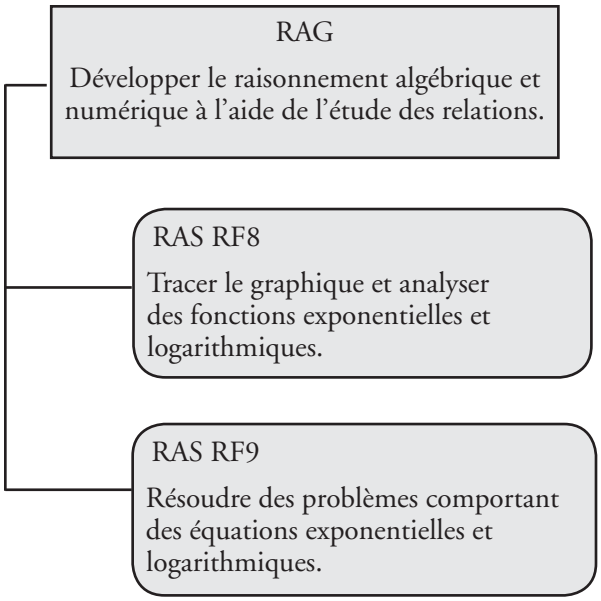
Orientation et contexte

Dans ce module, les élèves seront initiés au graphique de la fonction exponentielle $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$. Ils étudieront les effets des translations, des étirements et des réflexions sur le graphique de base et appliqueront ces transformations à des graphiques de fonctions exponentielles sous la forme $y = a(c)^{b(t - h)} + k$.

Les élèves résoudront des équations exponentielles en écrivant les deux membres de l'équation comme des puissances rationnelles de la même base. Lorsque ce ne sera pas possible, ils utiliseront la méthode des essais systématiques ou la technologie graphique pour trouver une solution approximative. Cette méthode sera réexaminée dans la prochaine unité portant sur les logarithmes.

Tout au long de l'unité, les élèves travailleront sur des problèmes qui peuvent être modélisés par des fonctions exponentielles.

Cadre des résultats d'apprentissage



Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
Relations et Fonctions		
AN3. Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels. [C, L, RP, R] RF1. Interpréter et expliquer les relations parmi des données, des graphiques et des situations. [C, L, R, T, V]	RF11. Tracer le graphique et analyser des fonctions inverses (limité à l'inverse des fonctions linéaires et quadratiques). [L, R, T, V]	RF8. Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques. [C, L, T, V] RF9. Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques. [C, L, RP, R]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF8 Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques.

[C, L, T, V]

Indicateurs de rendement:

RF8.1 *Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, un graphique d'une fonction exponentielle de la forme* $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$.

RF8.2 *Identifier les caractéristiques du graphique d'une fonction exponentielle de la forme* $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$ *y compris le domaine, l'image, l'asymptote horizontale et les coordonnées à l'origine, et expliquer la signification de l'asymptote horizontale.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 1231, les élèves ont travaillé avec les lois des exposants, des exposants entiers et des exposants rationnels. Ils ont aussi appliqué les lois des exposants à des expressions à bases rationnelles et variables et à des exposants entiers et rationnels (AN3). En outre, les élèves ont représenté graphiquement un ensemble de données et déterminé les limites du domaine et de l'intervalle, avec et sans outils technologiques (RF1). Dans le cours Mathématiques 2230, les élèves ont représenté graphiquement et analysé des fonctions inverses (linéaires et quadratiques seulement) de forme $\frac{}{f(x)}$ et ils ont été initiés à la notion d'asymptote (RF11).

Dans le module les transformations de fonctions du cours Mathématiques 3230, les élèves ont travaillé avec des translations horizontales et verticales (RF1), des étirements horizontaux et verticaux (RF2) et des combinaisons d'étirements et de translations (RF3). Ils ont aussi utilisé des règles de correspondance dans le contexte de ces transformations. Dans la présente unité, ils travailleront sur des fonctions exponentielles.

En guise d'introduction aux fonctions exponentielles, demander aux élèves de créer des tables de valeurs et les graphiques correspondants pour des fonctions exponentielles de forme $y = c^x$ où c > 1 et $0 < c < 1$. Ils peuvent créer des tables pour les fonctions comme les suivantes :

- $y = 2^x$
- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
- $y = 2{,}8^x$
- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
- $y = 0{,}16^x$

Lorsque les caractéristiques de ces graphiques sont présentées, l'accent devrait être mis sur :

- les coordonnées à l'origine
- le domaine et l'image
- si le graphique représente une fonction croissante ou décroissante
- l'équation de l'asymptote horizontale

Quand les élèves réfléchissent à la signification de l'asymptote horizontale, ils devraient examiner dans quels cas le graphique s'approche de son asymptote à mesure que les valeurs de x augmentent (tendent vers l'infini positif) et dans quels cas le graphique s'approche de son asymptote à mesure que les valeurs de x diminuent (tendent vers l'infini négatif).

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Entrevue

- Pour chacun des exemples suivants, demander aux élèves de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante et d'expliquer pourquoi.

  (i) $y = 4^x$

  (ii) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

  (iii) $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

(RF8.2)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi une fonction exponentielle ne peut pas avoir une base négative ou une base de 0 ou de 1.

(RF8.2)

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi les graphiques des fonctions de forme $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$:

  (i) n'ont pas d'abscisses à l'origine
  (ii) ont toujours une ordonnée à l'origine à (0, 1)
  (iii) ont toujours le même domaine et la même image

(RF8.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

7.1 Les caractéristiques des fonctions exponentielles

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 334-345

Guide d'enseignement (GE): pp. 174-180

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF8 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF8.1, RF8.2 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

L'enseignant devrait profiter de cette occasion pour définir les notions de croissance exponentielle (augmentation) et de décroissance exponentielle (diminution). Les élèves doivent être capables de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante selon que la base, *c,* est supérieure à 1 ou entre 0 et 1. Ils doivent aussi déterminer les similitudes et les différences entre les graphiques.

Les élèves devraient étudier les graphiques d'autres fonctions exponentielles où $c>1$ et $0 < c < 1$ pour confirmer les conclusions de l'activité d'introduction. Ils devraient aussi représenter graphiquement $y = c^x$ selon que $c = 1$ ou que $c < 0$. Lorsque $c = 1$, le graphique est une ligne horizontale. Lorsque c est négatif, les valeurs de y « oscillent» du positif au négatif pour les valeurs entières de x; avec des valeurs rationnelles de x, des valeurs irrationnelles de y peuvent être obtenues. Pour le confirmer, les élèves peuvent remplir la table ci-dessous pour les fonctions $y = (-2)^x$ and $y = (1)^x$.

x	y
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{3}{2}$	
2	

Les élèves devraient aussi analyser les graphiques et les tables de valeurs des fonctions exponentielles pour déterminer les fonctions correspondantes.

On peut les initier à des problèmes de croissance et de décroissance exponentielles avec des notions comme celles de demi-vie, de croissance ou de décroissance bactérienne, d'intensité de lumiére ou de finances, pourvu que ces situations soient modélisées par des fonctions de forme $y = c^x$. Les élèves feront des travaux approfondis des fonctions de la forme $y = a(c)^{b(x-\mathrm{h})} + k$ plus tard dans cette unité aprés qu'ils ont fait les transformations à $y = c^x$. Les élèves doivent déterminer les limites du domaine et de l'image dans le contexte du problème.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Entrevue

- Demander aux élèves de déterminer dans quelles situations $c > 1$ (croissance) et dans quelles situations $0 < c < 1$ (décroissance). Ils doivent expliquer leur choix.
  - (i) Le nombre de neutrons dans une réaction de fission nucléaire triple à chaque étape de la progression.
  - (ii) Le volume de glace dans une certaine région de la calotte glaciaire arctique diminue à un taux de 0,5 % par an.
  - (iii) Lionel reçoit une augmentation de salaire de 2,5 % par an.

(RF8.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

7.1 Les caractéristiques des fonctions exponentielles

MÉ: pp. 334-345

GE: pp. 174-180

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF8 Suite...

Indicateur de rendement:

RF8.3 *Esquisser le graphique d'une fonction exponentielle en appliquant un ensemble de transformations au graphique de $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$ et indiquer les caractéristiques du graphique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les travaux antérieurs portant sur les transformations seront maintenant appliqués aux fonctions exponentielles. Les élèves doivent faire subir des réflexions, des étirements et des translations à des courbes de croissance et de décroissance exponentielles, puis les relier aux paramètres a, b, h, et k dans une fonction de forme $y = a(c)^{b(x - h)} + k$, avec diverses valeurs de c. Les élèves peuvent également écrire des règles de correspondance qui fonctionnent avec les transformations. Il peut être préférable de commencer par étudier un type de transformation à la fois.

- Translations

Les élèves peuvent créer des tables de valeurs et les graphiques de fonctions de forme $f(x) = c^x + k$. À l'aide de fonctions comme $f(x) = 2^x$, $f(x) = 2^x+3$, et $f(x) = 2^x - 4$, ils doivent étudier la relation entre la valeur de k et la translation verticale. Les élèves doivent ensuite étudier les effets du paramètre h sur des fonctions de forme $f(x) = c^{x - h}$, comme $f(x) = 2^{x + 3}$ et $f(x) = 2^{x - 4}$. Les élèves peuvent expérimenter de façon approfondie en utilisant d'autres bases à l'aide de la technologie graphique. Ils peuvent aussi écrire des règles de correspondance faisant le lien entre le graphique de $y = c^x$ et les graphiques transformés.

- Étirements

Les étirements verticaux devraient être abordés avec des fonctions de forme $y = a(c)^x$ en créant des tables de valeurs pour un ensemble de fonctions comme $y = 2(5)^x$, $y = 4(5)^x$ et $y = \frac{1}{3}(5)^x$. Les étirements horizontaux peuvent être examinés à partir d'un ensemble de fonctions de forme $y = c^{bx}$ comme $y = 5^{2x}$, $y = 5^{\frac{x}{3}}$ et $y = 5^{0,2x}$.

- Réflexions

Les réflexions à partir de l'axe des x doivent être examinées sur des fonctions de forme $y = -c^x$ avec des tables de valeurs pour un ensemble de fonctions comme $y = -2^x$, $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ et $y = -(4)^x$.

Les réflexions à partir de l'axe des y pour les fonctions de forme $y = c^{-x}$ peuvent être abordées en créant des tables de valeurs pour un ensemble de fonctions comme $y = 2^{-x}$ et $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. À noter, les élèves devraient examiner la relation entre $y = \left(\frac{1}{c}\right)^x$ et $y = c^{-x}$.

Une fois l'effet de chaque transformation a été étudié, les élèves doivent travailler avec des combinaisons de transformations sur des fonctions de forme $y = a(c)^{b(x - h)} + k$, avec des valeurs variées pour les paramètres a, b, h, et k. Dans l'unité les transformations de fonctions, les élèves ont étudié l'ordre dans lequel les transformations devraient être appliquées. Ce concept devrait être révisé ici.

Les applications de la croissance et de la décroissance exponentielles peuvent être présentées à ce moment, comme le comportement d'un liquide se refroidissant, la désintégration d'un élément radioactif, les médicaments ou l'intensité de lumiere.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de représenter graphiquement chacun des éléments suivants et de donner le domaine, l'image et l'équation de l'asymptote horizontale :

  (i) $y = -\frac{1}{3}(2)^{x+3} - 1$

  (ii) $y = 2(3)^{-\frac{1}{2}(x-2)} + 5$

(RF8.3)

- Demander aux élèves de déterminer la valeur de chaque paramètre (*a*, *b*, *h*, et *k*) et son effet sur le graphique original pour les fonctions:

  (i) $y = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)} + 4$

  (ii) $y = \frac{1}{2}(3)^{-x+2} - 4$

(RF8.3)

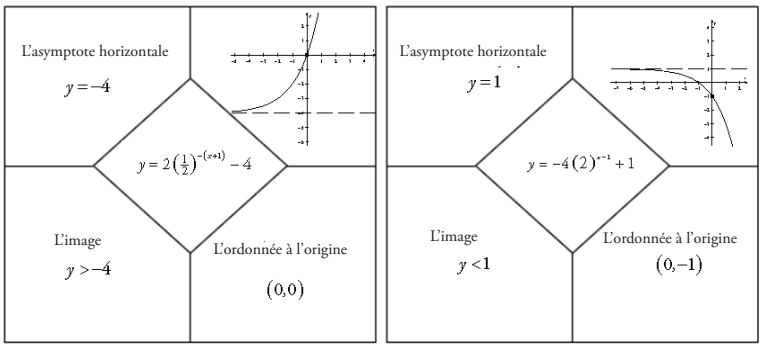
Journal

- Demander aux élèves de créer une fonction de décroissance exponentielle ayant une asymptote horizontale à $y = -4$ et une ordonnée à l'origine à (0, 2). Ils doivent tracer le graphique de leur fonction et expliquer pourquoi ils ont choisi les valeurs de *a, b,* h et *k* qu'ils ont utilisées.

(RF8.3)

Observation

- Les élèves peuvent travailler en équipes de deux pour compléter des casse-tête représentant les caractéristiques et les graphiques de différentes fonctions exponentielles de forme $y = a(c)^{b(x-h)} + k$. Ils devraient recevoir 20 pièces de casse-tête (4 casse-tête complets) pour lesquels ils doivent associer les caractéristiques à la bonne fonction. Des exemples sont fournis ci-dessous.



(RF8.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

7.2 Les transformations des fonctions exponentielles

MÉ: pp. 346-357

GE: pp. 181-187

Liens Internet

https://www.desmos.com/calculator

Cette calculatrice à affichage graphique en ligne permet d'étudier les effets des transformations sur des graphiques de fonctions exponentielles.

[en anglais seulement]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF9 Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.

[C, L, RP, R]

Indicateurs de rendement:

RF9.1 *Déterminer la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases sont des puissances les unes des autres.*

RF9.2 *Déterminer, à l'aide d'une variété de stratégies, la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases ne sont pas des puissances les unes des autres.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

L'accent est mis sur la résolution de problèmes des équations exponentielles ayant les mêmes bases et des méthodes d'estimation. Des situations de résolution de problème faisant intervenir des équations logarithmiques seront abordées dans la prochaine unité.

En 9e année, les élèves ont réécrit des nombres sous forme de puissances et résolu des problèmes des exposants entiers à l'aide des lois des exposants (9N1, 9N2). Dans le cours Mathématiques 1231, ils ont travaillé avec des exposants négatifs, des exposants rationnels avec les lois des exposants et des radicaux et des problèmes (AN3). Ils ont aussi travaillé avec des bases variables. Maintenant, les élèves doivent résoudre des équations exponentielles à exposants variables dont les bases peuvent être exprimées comme des puissances rationnelles d'une même base, y compris des bases radicales. Ils travailleront avec des équations comme $25^x = \left(\frac{1}{125}\right)^3$. Dans ce cas, les deux bases peuvent être exprimées sous forme de puissances entières de 5.

Les élèves doivent développer leurs compétences d'estimation pour les solutions d'équations exponentielles à exposants variables, y compris ceux dont les bases ne peuvent pas être exprimées en tant que puissances rationnelles de la même base. Lorsqu'ils utiliseront les logarithmes pour résoudre des équations, ils seront mieux capables de déterminer la vraisemblance de leurs solutions. Les stratégies suggérées comprennent les essais systématiques et l'utilisation de la technologie graphique.

- Essais systématiques

Les élèves peuvent résoudre $2^x = 10$, à deux décimales près, en utilisant le processus décrit ici :

Comme 10 est plus proche de $2^3 = 8$ que de $2^4 = 16$, ils peuvent commencer avec $x \doteq 3{,}3$.

Valeur d'essai pour x	Puissance	Valeur approximative
3,3	$2^{3,3}$	9,849
3,4	$2^{3,4}$	10,556
La valeur obtenue pour $2^{3,3}$ est plus proche de 10, donc la prochaine estimation devrait être plus proche de 3,3 que de 3,4.		
3,31	$2^{3,31}$	9,918
3,32	$2^{3,32}$	9,987
3,33	$2^{3,33}$	10,056

Les élèves devraient raisonner que la meilleure estimation est $x \doteq 3{,}32$ car 9,987 est plus proche de 10 que 10,056.

Les élèves doivent utiliser les essais systématiques pour résoudre des équations exponentielles avec une variété de bases, y compris des bases rationnelles. Même si la précision des estimations peut varier, elles doivent être au dixième près au minimum.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de déterminer la solution d'équations comme les suivantes :
  (i) $9^{2x+1} = 81$
  (ii) $16^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$
  (iii) $40 = 4^{2x+3}$

(RF9.1, RF9.2)

- Demander aux élèves de déterminer algébriquement la solution des équations suivantes :

  (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = (81)^{3-x}$
  (ii) $5\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 80$
  (iii) $\sqrt{5} = 25^{x-1}$
  (iv) $27^{2x-1} = \sqrt[3]{3}$
  (v) $\sqrt[5]{8^{x-1}} = \sqrt[3]{16^{x}}$
  (vi) $\sqrt{3^{x}} = 9^{2x+1}$

(RF9.1)

Performance

- Dans le cadre de l'activité *Prochaine question*, les élèves peuvent résoudre diverses équations exponentielles dont les deux membres peuvent être écrits en tant que puissances rationnelles d'une même base.

  (i) Préparer une série de cartes comptant au moins une carte par élève dans la classe. La question figure sur un côté de la carte et la réponse sur l'autre.

  (ii) Donner une carte à chaque élève. Leur donner une minute ou deux pour se familiariser avec la question. Ils doivent ensuite trouver un partenaire à qui ils posent la question.

  (iii) Si le partenaire n'est pas capable de répondre à la question, ils devraient lui donner des indices avant de donner la réponse.

  (iv) Une fois que les deux partenaires se sont posé leurs questions, ils échangent leurs cartes et trouvent de nouveaux partenaires.

(RF9.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

7.3 La résolution d'équations exponentielles

MÉ: pp. 358-365

GE: pp. 188-193

Notes

- Le manuel de l'élève ne traite pas des équations exponentielles à base radicale.
- Le manuel de l'élève traite brièvement de la résolution d'équations exponentielles avec des exposants négatifs.

Les enseignants doivent trouver du matériel complémentaire sur ces sujets.

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF9 Suite ...

Indicateur de rendement:

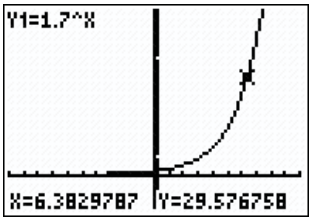
RF9.2 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

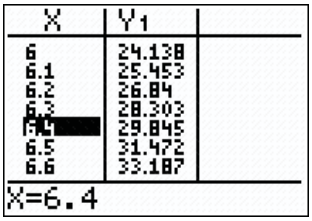
- La technologie graphique

Les élèves peuvent aussi utiliser la technologie graphique pour déterminer la solution d'une équation exponentielle. À l'aide de la technologie graphique, les élèves peuvent trouver la solution dans le graphique ou dans la table de valeurs.

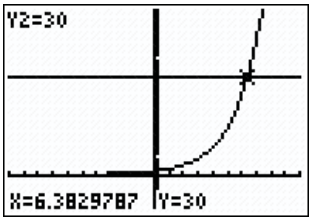
Pour déterminer la solution de l'équation $1{,}7^x = 30$, par exemple, les élèves peuvent utiliser le graphique de $y = 1{,}7^x$ pour déterminer la valeur de x qui produit une valeur approximatve de 30.



Les élèves peuvent aussi générer la table des valeurs de l'équation pour trouver la valeur de x qui donne une valeur approximative de 30.



Autrement, ils peuvent déterminer l'intersection des graphiques de $y = 1{,}7^x$ et de $y = 30$ pour obtenir la solution approximative.



Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Entrevue

- Demander aux élèves s'il est préférable d'estimer la solution à $5^{3x-1} = 12^{2x+1}$ par essais systématiques ou à l'aide de la technologie graphique, et de justifier leur choix.

(RF9.2)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer quand ils peuvent résoudre une équation exponentielle de manière algébrique et quand ils doivent utiliser une méthode d'estimation (graphique ou par essais systématiques).

(RF9.1, RF9.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée
Mathématiques pré-calcul 12

7.3 La résolution d'équations exponentielles

MÉ: pp. 358-365

GE: pp. 188-193

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
RF9 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF9.3 *Résoudre un problème comportant de la croissance exponentielle ou de la désintégration.*

RF9.4 *Résoudre un problème comportant l'application d'équations exponentielles aux prêts, aux hypothèques et aux placements.*

RF9.5 *Résoudre un problème en modélisant une situation comportant une équation exponentielle ou logarithmique.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent travailler avec des problèmes qui peuvent être modélisés par des fonctions ou des équations exponentielles, comme une modélisation du refroidissement d'un liquide, de la désintégration d'un élément radioactif, des médicaments, de demi-vies, de doublement périodique, de croissance ou de décroissance bactérienne, d'intensité de lumiere, ou de finances. Ils doivent résoudre des problèmes dans des situations etant donné:

- la fonction ou l'équation exponentielle
- le graphique d'une fonction exponentielle
- une situation et ils doivent créer un modèle exponentiel pour en trouver la solution

Les élèves doivent répondre à des questions comme les suivantes :

1. Michelle investit une somme initiale de 500$ et la valeur de son investissement augmente de 4% par an.
   - Créez une fonction pour modéliser cette situation.
   - Quelle est la valeur de l'investissement de Michelle après 30 ans?
   - Combien de temps faudra-t-il pour que l'investissement double?

Les élèves doivent résoudre ce problème en utilisant les essais systématiques, une table de valeurs ou la technologie graphique.

2. La demi-vie du radon 222 est de 92 heures. Si l'échantillon initial est de 48 g, combien de temps faudra-t-il pour qu'il ne reste que 6 g de radon?

Les élèves peuvent utiliser une des deux méthodes ci-dessous pour résoudre ce problème algébriquement :

$A = 48\left(\frac{1}{2}\right)^n$

n est le temps écoulé en intervalles de 92 heures

$6 = 48\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$3 = n$

$\therefore$ Il faudra 276 heures.

$A = 48\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{92}}$

t est le nombre d' heures

$6 = 48\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{92}}$

$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{92}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{92}}$

$3 = \frac{t}{92}$

$276 = t$

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- La demi-vie d'un certain isotope radioactif est de 30 heures. Demander aux élèves de déterminer algébriquement le temps qu'il faudra pour qu'un échantillon de 1792 mg se détériore au point où il ne reste que 56 mg.

(RF9.3)

- Si une nouvelle voiture, achetée à un prix de 20 000$, se déprécie au taux de 28% tous les deux ans, demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  (i) Quelle sera la valeur de cette voiture après six ans?
  (ii) Dans combien de temps la voiture ne vaudra-t-elle que la moitié de sa valeur initiale?

(RF9.3, RF9.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

7.3 La résolution d'équations exponentielles

MÉ: pp. 358-365

GE: pp. 188-193

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

RF9 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF9.3, RF9.4, RF9.5 *Suite*

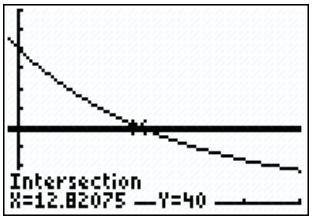
Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent aussi modéliser une situation comme la suivante à l'aide d'une fonction exponentielle, à partir de paramètres spécifiques fournis.

Une tasse de chocolat chaud est servie à une température initiale de 80°C, puis on la laisse refroidir dans un stade où la température de l'air est de 5°C. La différence entre la température du chocolat chaud et la température ambiante diminue de 30% toutes les 6 minutes. Si T représente la température du chocolat chaud en degrés Celsius, mesurée en fonction du temps, t, en minutes, l'élève doit répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la fonction exponentielle transformée sous la forme $T = a(c)^{b(t-h)} + k$? $\left[\text{Solution:} T = 75(0,7)^{\frac{t}{6}} + 5\right]$
- Quelle est la température au temps $t = 11$ minutes?
- Combien de temps faut-il pour que le chocolat chaud ait refroidi à 40°C?

  Comme méthode de résolution possible, une solution graphique est illustrée :



Les élèves doivent modéliser une situation comportant une fonction exponentielle étant donné un graphique, une table de valeurs ou une description, pour une équation dont l'asymptote horizontale est $y = 0$. Lorsque l'asymptote est $y = 0$, les élèves doivent déterminer tous les paramètres à partir de l'information fournie. Lorsque l'asymptote n'est pas $y = 0$, comme dans l'exemple ci-dessus, les élèves ne doivent pas déterminer le rapport commun à partir d'une table de valeurs ou d'un graphique. Ils doivent déterminer le rapport commun à partir de la description du problème.

Pour résoudre des problèmes de nature financière, les élèves doivent se familiariser avec le fonctionnement des taux d'intérêt annuels. Expliquer les périodes de composition d'intérêts courantes. Les élèves doivent comprendre qu'une composition semi-annuelle, par exemple, signifie que l'intérêt est calculé deux fois par an.

La résolution de problèmes comportant des équations logarithmiques sera abordée dans la prochaine unité.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique á l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de choisir entre deux options de placement et de justifier leur choix : Un taux d'intérêt annuel de 12% composé annuellement ou un taux d'intérêt annuel de 12% composé mensuellement.

(RF9.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

7.3 La résolution d'équations exponentielles

MÉ: pp. 358-365

GE: pp. 188-193

Les fonctions logarithmiques

Durée suggérée: 12 heures

Aperçu du module

Orientation et contexte

Dans ce module précédent, les élèves ont travaillé avec des équations exponentielles dont les deux parties peuvent être écrites comme des puissances rationnelles de la même base. Ils résoudront maintenant des équations exponentielles où ce n'est pas possible.

Les élèves sont initiés aux logarithmes en tant que réciproque des équations exponentielles. Ils tracent le graphique de $y = \log_c x$, $c \neq 0$, $c > 1$ et étudient les effets de diverses transformations sur ce graphique.

En utilisant les lois des logarithmes, les élèves simplifient et évaluent des expressions. Ils résolvent des équations et des problèmes comportant des équations logarithmiques et exponentielles.

Cadre des résultats d'apprentissage

RAG

Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

RAS RF6

Démontrer une compréhension des logarithmes.

RAS RF7

Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances.

RAS RF8

Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques.

RAS RF9

Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.

Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
Relations et Fonctions		
RF1. Interpréter et expliquer les relations parmi des données, des graphiques et des situations. [C, L, R, T, V] AN3. Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels. [C, L, RP, R]		RF6. Démontrer une compréhension des logarithmes. [L, CE, R] RF7. Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances. [C, L, CE, R, T] RF8. Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques. [C, L, T, V] RF9. Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques. [C, L, RP, R]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir

RF6. Démontrer une compréhension des logarithmes.

[L, CE, R]

Indicateurs de rendement:

RF6.1 *Expliquer la relation entre les logarithmes et les exposants.*

RF6.2 *Exprimer une expression logarithmique sous la forme d'une expression exponentielle et vice-versa.*

RF6.3 *Déterminer la valeur exacte d'un logarithme tel que $\log_2 8$, sans l'aide de la technologie.*

RF6.4 *Estimer la valeur d'un logarithme, à l'aide de points de repère, et expliquer le raisonnement, p. ex. : vu que $\log_2 8 = 3$ et $\log_2 16 = 4$, $\log_2 9$ est égal à environ 3,1.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans ce module précédent de ce cours, les élèves ont travaillé avec les réciproques (RF5) et aussi avec les fonctions exponentielles et leurs graphiques (RF8, RF9). Ils approfondissent ces concepts pour étudier les logarithmes et leurs graphiques.

Les élèves devraient être initiés aux logarithmes en tant que variante d'un énoncé exponentiel. L' énoncé $3^2 = 9$, par exemple, peut s'écrire $\log_3 9 = 2$. Les élèves devraient comprendre qu'un logarithme $\log_c x = y$ leur démande "Quel exposant, y, est nécessaire pour que $c^y = x$?". Étant donné un énoncé sous forme exponentielle, ils doivent être capables de l'écrire sous forme logarithmique, et vice versa. Initier les élèves au logarithme décimal et noter que, dans ce cas, la base n'est généralement pas écrite : $\log_{10} x = \log x$.

Lorsque la valeur d'un logarithme est un nombre rationnel, comme $\log_{64} 4$ et $\log_{\frac{1}{2}} 32$, les élèves doivent être en mesure de déterminer la valeur exacte sans outil technologique. Également, les élèves doivent être en mesure de déterminer une inconnue dans les équations logarithmiques. Les exemples suivants peuvent être résolus par la réécriture sous forme exponentielle :

- $\log_3 x = -2$
- $\log_x \frac{81}{16} = 2$

Les élèves devraient aussi penser aux restrictions qui s'appliquent à c dans l'équation $\log_c x = y$. Demander les élèves de réécrire les équations suivantes sous forme exponentielle pour déterminer la valeur de x :

- $\log_1 4 = x$
- $\log_{-2} 8 = x$

Ils doivent réaliser que quand $c = 1$, l'équation exponentielle résultante ne peut pas être résolue. La seule exception est une équation où $c = 1$ et $x = 1$. Lorsque $c < 0$, l'équation exponentielle résultante peut être impossible à résoudre. Par conséquent, lorsque des logarithmes sont utilisés, la base est limitée à des valeurs positives autres que 1; c'est-à-dire que pour $y = \log_c x$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Lorsqu'ils tentent de résoudre une équation comme $\log_x \frac{81}{16} = 2$, les élèves oublient souvent que la base doit être positive. Même si l'équation quadratique $x^2 = \frac{81}{16}$ a deux solutions ($x = \pm\frac{9}{4}$), la seule solution pour l'équation logarithmique est $\frac{9}{4}$.

Les élèves doivent aussi utiliser des points de repères pour estimer la valeur d'un logarithme. Par exemple, pour estimer $\log_5 106$, par exemple, ils devraient se rendre compte que $5^2 = 25$ et $5^3 = 125$. Alors, la réponse doit être entre 2 et 3 et la réponse est plus proche de 3. Par essais systématiques, les élèves devraient être en mesure de déterminer une valeur au moins au dixième près.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves d'évaluer les éléments suivants sans outils technologiques :

  (i) $\log_{\frac{1}{5}} 25$

  (ii) $\log_4 32$

  (RF6.2,RF6.3)

- Demander aux élèves de déterminer la valeur des éléments suivants au dixième près :

  (i) $\log_3 24$

  (ii) $\log_6 200$

  (iii) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

  (RF6.4)

Entrevue

- Demander aux élèves d'expliquer si n'importe quel nombre réel positif peut être la base d'un logarithme.

  (RF6.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.1 Les Logarithmes

Manuel de l'élève (MÉ): pp. 372-382

Guide d'enseignement (GE): pp. 200-204

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir

RF8. Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques.

[C, L, T, V]

Indicateur de rendement:

RF8.4 *Démontrer, graphiquement, qu'une fonction logarithmique et une fonction exponentielle de même base sont des réciproques l'une de l'autre.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Ce résultat a été abordé dans l'unité précédente portant sur les fonctions exponentielles de forme $y = c^x$, où $c > 0$, $c \neq 1$. Dans la présente unité, les élèves sont initiés au graphique de $y = \log_c x$, où $c > 0$, $c \neq 1$.

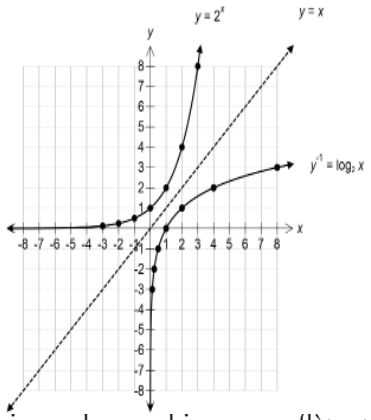
Il est important que les élèves comprennent la relation inverse entre les fonctions exponentielles et logarithmiques. Ils peuvent utiliser leurs connaissances préalables sur les fonctions exponentielles et réciproques pour étudier cette relation. Dans l'unité sur la transformation des fonctions, les élèves ont déterminé des équations réciproques en interchangeant les variables x et y et en déterminant la valeur de y (RF5). Ils peuvent appliquer le même procédé pour déterminer la réciproque d'une fonction exponentielle, comme $f(x) = 2^x$. On peut écrire cette fonction sous la forme $y = 2^x$ et échanger x et y, ce qui donne $x = 2^y$ de y et permet de déterminer la valeur de y. Pour ce faire, il est nécessaire d'écrire l'équation sous forme logarithmique et d'écrire les résultats sous la forme $y = \log_2 x$. La fonction réciproque est $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.

Les élèves peuvent utiliser la table de valeurs pour $f(x) = 2^x$ en vue de générer la table correspondant à $f^{-1}(x) = \log_2 x$ en interchangeant le domaine et l'image :

x	$f(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Il est ainsi possible de créer les graphiques.



Les élèves doivent voir que les graphiques se reflètent l'un à l'autre selon l'axe de la droite $y = x$. Demandez-leur de déterminer la relation entre le domaine et l'image pour les deux fonctions. Cette méthode de traçage de graphiques peut être appliquée à n'importe quelle fonction logarithmique de la forme $y = \log_c x$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Le point $\left(\frac{1}{36}, -2\right)$ est situé sur le graphique de $y = \log_c x$. À supposer que le point (k, 216) est situé sur le graphique de la réciproque, demander aux élèves de déterminer les valeurs de c et k.

(RF6.3, RF8.4)

- Étant donné le graphique et l'équation d'une fonction exponentielle de forme $y = c^x$, demander aux élèves de déterminer l'équation, le domaine et l'image de la relation réciproque.

(RF8.4)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer, à l'aide du graphique de $y = \log_c x$, pourquoi ils ne peuvent pas évaluer $\log_c(-3)$ et $\log_c(0)$.

(RF8.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.1 Les logarithmes

MÉ pp. 372-382

GE: pp. 200-204

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir
RF8 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF8.5 *Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique d'une fonction logarithmique de la forme* $y = \log_c x$, $c > 1$.

RF8.6 *Identifier les caractéristiques du graphique d'une fonction logarithmique de la forme* $y = \log_c x$, $c > 1$, *y compris le domaine, l'image, l'asymptote verticale et les coordonnées à l'origine, et expliquer la signification de l'asymptote verticale.*

RF8.7 *Esquisser le graphique d'une fonction logarithmique en appliquant un ensemble de transformations au graphique de* $y = \log_c x$, $c > 1$, *et indiquer les caractéristiques du graphique.*

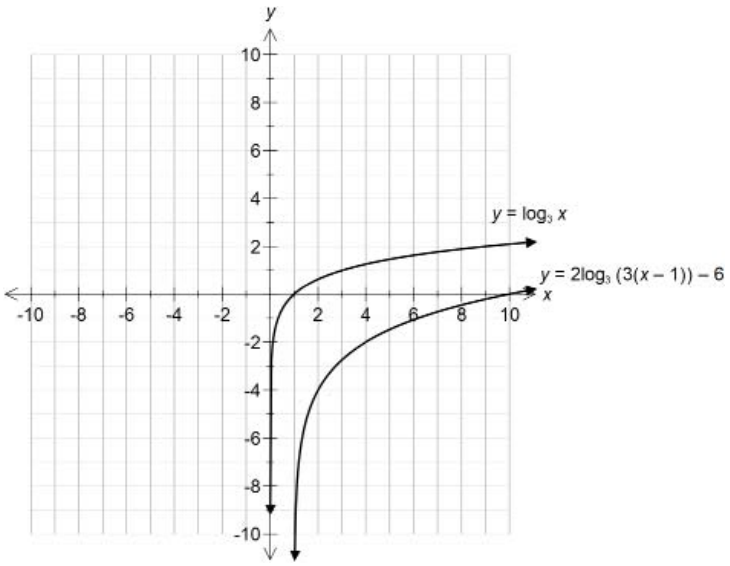
Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves ont eu à tracer des graphiques au moyen de transformations de fonctions générales (RF1, RF2, RF3, RF4) et de fonctions exponentielles (RF8). Ces transformations vont maintenant être appliquées à des fonctions logarithmiques. Les logarithmes seront limités à des bases supérieures à 1.

Les élèves peuvent maintenant appliquer leurs travaux précédents sur les transformations aux fonctions logarithmiques. Demander les élèves de représenter graphiquement une fonction logarithmique, comme $y = \log_3 x$, et de déterminer le domaine, l'image, les coordonnées à l'origine et l'asymptote verticale. Les élèves doivent se rendre compte que le domaine est limité par l'asymptote verticale. Ensuite, demander les élèves de représenter graphiquement une transformation de cette fonction logarithmique, comme $y = 2\log_3(3(x-1))-6$. Pour représenter ce graphique, les élèves peuvent identifier les transformations :

- L'étirement vertical est de 2
- L'étirement horizontal est de $\frac{1}{3}$
- La translation horizontale est de 1
- La translation verticale est de –6

Il est alors possible de créer le graphique en appliquant les étirements en premier, puis les translations. Une autre approche consiste à établir la règle de correspondance (x, y) → $(\frac{1}{3}x + 1, 2y - 6)$ et de l'utiliser pour produire une table de valeurs de la fonction transformée.



Les élèves doivent reconnaître que la translation horizontale détermine l'asymptote verticale, qui définit également le domaine.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de représenter graphiquement chacune des équations suivantes au moyen de transformations :

  (i) $y = 2\log_2(-x+1) - 6$

  (ii) $y = -\frac{1}{2}\log_3(2(x+3)) + 1$

  (RF8.7)

- Demander aux élèves d'identifier les coordonnées à l'origine, l'asymptote verticale et le domaine de $y = 2\log_6(3(x + 4)) - 4$.

  (RF8.7)

- Demander aux élèves d'appliquer la règle de correspondance $(x, y) \rightarrow (-\frac{1}{2}x + 1, 3y - 12)$ à $y = \log_4 x$. Ils doivent écrire la fonction résultante et en déterminer le domaine, l'image, les coordonnées à l'origine et l'asymptote verticale.

  (RF8.6)

Entrevue

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi toutes les fonctions de forme $y = \log_c x$ passent par le point (1, 0).

  (RF8.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.2 Les transformations des fonctions logarithmiques

MÉ: pp. 383-391

GE: pp. 205-208

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir

RF8 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF8.6, RF8.7 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Pour déterminer l'abscisse à l'origine de la fonction logarithmique transformée, les élèves doivent résoudre l'équation quand $y = 0$. Ils ont été initiés à ce type d'exercice avec d'autres types de fonctions. Ils peuvent déterminer l'abscisse à l'origine de $y = 2\log_3(3(x - 1)) - 6$, par exemple, comme suit :

$$0 = 2\log_3(3(x - 1)) - 6$$

$$6 = 2\log_3(3x - 3)$$

$$3 = \log_3(3x - 3)$$

$$27 = 3x - 3$$

$$x = 10$$

De même, pour déterminer l'ordonnée à l'origine, les élèves résolvent selon $x = 0$. Pour l'instant, il peut être nécessaire d'utiliser des points de repères pour estimer la coordonnée à l'origine. Plus tard, ils seront en mesure de déterminer les ordonnées à l'origine plus précisément et plus rapidement en utilisant une calculatrice. Les élèves doivent aussi travailler sur des fonctions logarithmiques qui n'ont pas d'ordonnée à l'origine. Avec $y = 2\log_3(3(x - 1)) - 6$ par exemple, lorsque $x = 0$, on obtient $y = 2\log_3(-3) - 6$. Étant donné que le domaine de $y = \log_3 x$ est $x \in (0, \infty)$, il n'y a pas de solution.

Les élèves pourraient avoir besoin de factoriser une expression pour en déterminer l'étirement horizontal. Par exemple, avant de représenter graphiquement $y = 3\log_4(-5x-5) - 4$ l'expression devrait être réécrite sous la forme $y = 3\log_4(-5(x + 1)) - 4$.

Les élèves doivent tracer des courbes logarithmiques dont l'ordonnée est l'axe de réflexion pour voir l'effet sur le domaine. Ils doivent se rendre compte que pour $y = 3\log_4(-5(x - 6)) + 1$, l'asymptote verticale est $x = 6$, mais le domaine est $x \in (-\infty, 6)$ parce que l'axe de réflexion est l'ordonnée.

Les élèves n'ont pas besoin de déterminer l'équation d'une fonction logarithmique à partir de son graphique. Toutefois, à partir du graphique d'une fonction logarithmique, ils doivent identifier la fonction parmi un certain nombre d'options.

Les élèves doivent tracer le graphique d'une fonction logarithmique donnée, en montrant clairement l'asymptote et les coordonnées à l'origine, et identifier le graphique d'une fonction logarithmique parmi un certain nombre d'options.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Observation

- Les élèves peuvent travailler en équipes de deux pour compléter des exercices sur les caractéristiques et les graphiques de fonctions logarithmiques variées. Reportez-vous à la stratégie d'observation à la page 147.

(RF8.6, RF8.7)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.2 Les transformations des fonctions logarithmiques

MÉ: pp. 383-391

GE: pp. 205-208

Note

L'exemple 3 à la p. 387 et le no. 6 à la p. 390 du manuel de l'élève ne font pas partie des attentes de ce cours.

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir
RF7 . Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances.

[C, L, CE, R, T]

Indicateurs de rendement:

RF7.1 *Développer et formuler des lois générales pour les logarithmes à l'aide d'exemples numériques et des lois des exposants.*

RF7.2 *Formuler chacune des lois des logarithmes.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans le cours Mathématiques 1231, les élèves ont travaillé avec les lois des exposants, y compris les exposants entiers et rationnels. Ils ont également appliqué les lois des exposants à des expressions à bases rationnelles et variables et à exposants entiers et rationnels (AN3). Les lois des logarithmes seront maintenant abordées en faisant appel à la fois à des exemples numériques et aux lois des exposants.

Les élèves travailleront avec les lois des logarithmes suivantes, en fonction des conditions $c > 0$, $m > 0$, $n > 0$ et $c \neq 1$ où $c, m, n \in R$:

- Loi du produit $\log_c MN = \log_c M + \log_c N$
- Loi du quotient $\log_c \frac{M}{N} = \log_c M - \log_c N$
- Loi des puissances $\log_c M^P = P\log_c M$

L'accent est placé sur l'utilisation de plusieurs exemples numériques pour permettre aux élèves de comprendre les lois des logarithmes.

Pour déduire la loi du quotient, par exemple, une méthode comme la suivante pourrait être utilisée :

- Commencer par les équations exponentielles : $16 = 4^2$ et $64 = 4^3$
- Convertir chaque équation à la forme logarithmique :
  $\log_4 16 = 2$ et $\log_4 64 = 3$
- Diviser les équations de l'étape 1: $\frac{64}{16} = 4^{3-2}$
- Réécrire les équations sous forme logarithmique : $\log_4 \frac{64}{16} = 3 - 2$
- Remplacer 2 par $\log_4 16$ et 3 par $\log_4 64$:
  $\log_4 \frac{64}{16} = \log_4 64 - \log_4 16$

Les élèves peuvent évaluer chaque membre de l'équation pour vérifier que le membre de gauche de l'équation est bien le même que le membre de droit. Ils doivent ensuite déduire la loi du quotient générale. Un exercice similaire pourrait servir à déduire la loi du produit.

Un exemple comme le suivant pourrait être utilisé pour déduire la loi des puissances :

- Commencer par l'équation exponentielle : $16 = 4^2$ (c.à.d., $\log_4 16 = 2$)
- Élever les deux côtés de l'équation à la puissance p: $16^p = (4^2)^p$
- Simplifier l'équation $16^p = (4)^{2p}$
- Convertir l'équation à la forme logarithmique : $\log_4 16^p = 2p$
- Remplacer 2 par $\log_4 16$: $\log_4 16^p = (\log_4 16)(p)$
- Réécrire sous la forme : $\log_4 16^p = p\log_4 16$

À partir de cet exemple, les élèves doivent déduire la loi générale des puissances. Les élèves doivent voir les démonstrations des lois des logarithmes, mais n'ont pas besoin de les reproduire.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de vérifier les équations suivantes en utilisant les lois des logarithmes :
  (i) $\log_3 27 = \log_3 9 + \log_3 3$
  (ii) $\log_5 25 = \log_5 125 - \log_5 5$
  (iii) $\log_2 64 = 6 \log_2 2$

(RF7.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.3 Les lois des logarithmes

MÉ: pp. 392-403

GE: pp. 209-213

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir

RF7 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF7.3 *Déterminer, à l'aide des lois des logarithmes, une expression équivalente à une expression logarithmique.*

RF7.4 *Déterminer, à l'aide de la technologie, la valeur approximative d'une expression logarithmique, telle que $\log_2 9$.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent simplifier des expressions logarithmiques comprenant des arguments numériques et variables. Pour les expressions à arguments variables, ils devraient déterminer les restrictions de la variable(s). Les arguments devraient être limités à des polynômes de deuxième degré ou moins. Ils ont été initiés aux techniques de factorisation dans le cours Mathématiques 1231 (AN5). Ils doivent maintenant voir où il est nécessaire d'utiliser la factorisation pour simplifier une expression. Les élèves doivent également travailler sur des questions dans lesquelles ils ont à écrire une expression logarithmique sous forme d'un unique logarithme et le simplifier au besoin :

- $\log_6 4 - (\log_6 72 + \frac{1}{4}\log_6 16)$
- $\log_b 2x + 3(\log_b x - \log_b y)$

Ils doivent aussi être capable d'écrire un logarithme unique sous forme de somme ou de différence de logarithmes multiples. L'application des lois des logarithmes au développement et à la réduction des expressions logarithmiques est utile pour résoudre des équations logarithmiques.

Les élèves doivent se rendre compte qu'aucune propriété générale des logarithmes ne permet de simplifier $\log_c(x + y)$. Ils pensent parfois à tort que cette expression est égale à $\log_c x + \log_c y$. Pour prouver que c'est faux, les élèves peuvent évaluer des expressions logarithmiques comme :

- $\log_{10}(2 + 3) = \log_{10} 5 \approx 0{,}699$
- $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 \approx 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

Les élèves ont été initiés à l'évaluation des expressions logarithmiques sans l'aide de la technologie grâce à l'utilisation des points de repères (RF6). Ils doivent maintenant approfondir cette compétence pour estimer la solution à l'aide de la technologie. Pour déterminer la valeur approximative de $\log_2 9$, par exemple, l'équation $\log_2 9 = x$ peut être réécrite sous forme exponentielle :

$$2^x = 9$$

$$\log 2^x = \log 9$$

$$x \log 2 = \log 9$$

$$x = \frac{\log 9}{\log 2}$$

$$x \approx 3{,}17$$

Quand les élèves travaillent sur cet exemple, ils doivent être en mesure de relier la solution du problème à l'équation originale.

$$\log_2 9 = x \rightarrow x = \frac{\log 9}{\log 2}$$

Cela mène à la propriété $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$. L'expression logarithmique peut être évaluée à l'aide d'une calculatrice, puisque la base a été changée à 10.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  (i) Un élève doit simplifier $\log_2 16 - \log_2 32 + 2\log_2 4$ et donne la réponse suivante :

$$\log_2 16 - \log_2 32 + \log_2 8$$
$$\log_2 \tfrac{16}{32} + \log_2 8$$
$$\log_2 \tfrac{1}{2} + \log_2 8$$
$$\log_2 4$$
$$2$$

  Dire où il a fait une erreur et donner la bonne réponse au problème.

  (RF7.3)

  (ii) Si $P = \log_3 8$ et $Q = \log_3 6$, écris $\log_3 8\sqrt{6}$ en fonction de P et de Q.

  (RF7.3)

- Demander aux élèves d'évaluer à l'aide des lois des logarithmes :

  (i) $3\log_6(2) + \log_6(27)$

  (ii) $\log_5(2.5) + 2\log_5(10) - \log_5(2)$

  (RF7.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.3 Les lois des logarithmes

MÉ: pp. 392-403

GE: pp. 209-213

Note

La propriété $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ n'est pas développée dans le manuel de l'élève, mais il en est fait mention à la question no. 19 de la p. 402.

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir

RF9. Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.

[C, L, RP, R]

Indicateurs de rendement:

RF9.6 *Déterminer la solution d'une équation logarithmique et vérifier la solution.*

RF9.7 *Expliquer pourquoi une solution d'une équation logarithmique peut être une solution étrangère.*

RF9.2 *Déterminer, à l'aide d'une variété de stratégies, la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases ne sont pas des puissances les unes des autres.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans l'unité précédente, les élèves ont résolu des équations exponentielles dont les puissances pouvaient être exprimées en puissances rationnelles de la même base. Dans les cas où les bases n'étaient pas les mêmes, la technologie de traçage de graphiques et les essais systématiques ont été utilisés pour estimer la valeur de la variable (RF9). Les élèves vont maintenant utiliser les logarithmes pour résoudre ces équations.

Demander aux élèves de résoudre des équations logarithmiques qui les obligent à trouver des solutions à des équations linéaires et à des équations du quadratiques:

- $\log_5(x + 1) + \log_5(x - 2) = \log_5 4$
- $\log_2(4x - 1) - \log_2(2x + 1) = 3$

Pour résoudre des équations, il faut tenir compte des valeurs non permises de la variable. Par exemple, les racines de $\log_2(x + 6) + \log_2(x + 4) = \log_2 8$, sont $x = -2$ et $x = -8$. Les élèves devraient se rendre compte que $x = -2$ est permise, mais que $x = -8$ est une racine étrangère.

Les élèves doivent maintenant utiliser les logarithmes pour résoudre des équations exponentielles. Ils doivent être en mesure de donner des réponses approximatives et des réponses exactes. Lorsqu'ils résolvent $3^{x+1} = 5^{4x-3}$ les élèves peuvent donner leur réponse sous la forme $x = \frac{-3\log 5 - \log 3}{\log 3 - 4\log 5}$ ou $x \approx 1{,}11$.

Une des erreurs que les élèves peuvent fréquemment commettre consiste à ne pas utiliser correctement la propriété de distributivité lorsqu'ils multiplient le logarithme avec l'expression variable. Encourager les élèves à placer la partie de l'équation qui est en exposant entre parenthèses lorsqu'ils la déplacent à l'avant du logarithme.

Ils doivent aussi vérifier que la solution n'est pas étrangère. Les élèves devraient être encouragés à utiliser des technologies graphiques ou les essais systématiques pour vérifier la vraisemblance de leur solution. La vérification peut également être faite en remplaçant la solution dans l'équation originale.

Une erreur commune se produit lorsque les élèves résolvent des équations comme $7(2^{3x}) = 21$. Discuter avec les élèves de la raison pour laquelle $7(2^{3x})$ n'est pas la même chose que 14^{3x}. Les élèves devraient diviser les deux côtés de l'équation par 7 pour isoler la puissance ($2^{3x} = 3$).

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de créer une équation logarithmique dont la seule solution est de $x = 4$.

(RF9.6)

- Les élèves doivent expliquer pourquoi l'équation $\log_4(1 - x) + \log_4(x - 3) = 1$ n'a pas de racines.

(RF9.6, RF9.7)

Entrevue

- Discuter avec les élèves de la raison pour laquelle la solution à $\log_4(x + 2) + \log_4(x - 4) = 2$ doit se situer dans le domaine $\{x > 4, x \in R\}$.

(RF9.7)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de trouver l'erreur dans la solution donnée et d'expliquer pourquoi elle est incorrecte. Ils devraient ensuite écrire la bonne solution.

$$10^x + 5 = 60$$
$$\log\left(10^x + 5\right) = \log 60$$
$$\log 10^x + \log 5 = \log 60$$
$$x \log 10 = \log 60 - \log 5$$
$$x = \frac{\log 60 - \log 5}{\log 10}$$

(RF9.2)

Performance

- Les élèves peuvent travailler en petits groupes pour résoudre un casse-tête dans lequel les côtés des pièces comportent des expressions qui doivent être placées vis-à-vis d'expressions équivalentes. Cette activité permet aux élèves de s'exercer à travailler avec des logarithmes et de débattre à savoir si les pièces vont ensemble ou non. Elle leur permet aussi de faire réviser leur travail par leurs pairs.

(RF7.3, RF7.4, RF9.2, RF9.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.4 Les équations logarithmiques et exponentielles

MÉ: pp. 404-415

GE: pp. 214-218

Lien Internet

www.mm/soft.com./index.php/home/free-software

Tarsia est un logiciel qui permet de créer des casse-tête.

[en anglais seulement]

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir
RF9 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF9.3 *Résoudre un problème comportant de la croissance exponentielle ou de la désintégration.*

RF9.5 *Résoudre un problème en modélisant une situation comportant une équation exponentielle ou logarithmique.*

RF9.8 *Résoudre un problème comportant les échelles logarithmiques telles que l'échelle de Richter et l'échelle de pH.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans l'unité précédente, les élèves ont résolu des problèmes de croissance et de décroissance exponentielles, ainsi que leurs applications financières (RF9). Les problèmes de ce type devraient être revisités, car la majorité d'entre eux comportent des équations exponentielles qui sont résolues à l'aide des logarithmes.

Les élèves doivent résoudre des problèmes où :

- l'équation exponentielle ou logarithmique est donnée
- le graphique d'une fonction exponentielle est donné
- une situation donnée peut être modélisée à l'aide d'une équation exponentielle ou logarithmique

Les élèves résoudront des problèmes comportant des échelles logarithmiques comme l'échelle de Richter (qui sert à mesurer la magnitude des tremblements de terre), l'échelle de pH (qui sert à mesurer l'acidité des solutions) et l'échelle des décibels (qui sert à mesurer le niveau sonore). Dans les problèmes sur l'échelle de Richter, l'échelle de pH ou l'échelle des décibels, les élèves n'ont pas besoin de développer des formules, elles devraient leur être fournies au besoin.

Les élèves pourraient avoir été initiés à l'échelle de pH dans leurs cours de sciences. Le pH d'une solution est déterminé à l'aide de l'équation $y = -\log x$, où x est la concentration d'ions hydrogène en moles par litre (mol/L). L'échelle varie de 0 à 14; les nombres inférieurs sont acides et les nombres supérieurs sont alcalins. Un pH de 7 est considéré comme neutre. L'échelle est une échelle logarithmique où une unité d'augmentation du pH correspond à une acidité 10 fois moins grande. Une autre façon d'aborder ce concept consiste à dire qu'une augmentation d'une unité du pH correspond à une alcalinité 10 fois plus élevée.

La magnitude d'un tremblement de terre, y, peut être déterminée à l'aide de $y = \log x$, où x est l'amplitude des vibrations mesurées à l'aide d'un sismographe. Une augmentation d'une unité de la magnitude correspond à une multiplication par 10 de l'amplitude.

Les niveaux sonores sont mesurés en décibels selon l'équation $\beta = 10(\log I + 12)$, où β est le niveau sonore en décibels (dB) et I est l'intensité sonore mesurée en watts par mètre carré (w/m^2). Il s'agit d'une bonne occasion pour les élèves de mesurer les volumes audio dans leur environnement. Ils pourraient utiliser une application de appareil mobile, par exemple, pour déterminer le niveau de décibels approximatif autour d'eux. Même si elle est assez fiable, l'application sert principalement à mesurer le niveau de bruit dans un milieu tranquille.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  (i) La magnitude d'un tremblement de terre, M, est mesurée par l'échelle de Richter en fonction de l'équation M = log I, où I représente l'intensité du tremblement de terre (mesurée en micromètres à partir de l'amplitude maximale de l'onde produite sur un sismographe). Une ville subit un tremblement de terre d'une magnitude de 4,2 sur l'échelle de Richter. Quatre ans plus tard, la même ville subit un tremblement de terre qui est cinq fois plus intense que le premier tremblement de terre. Quelle est la magnitude du deuxième séisme?

  (RF9.8)

  (ii) Après ingestion d'un antitussif, la quantité A (en mg) qui reste dans le corps est donnée par $A = 10(0,85)^t$, où t est donné en heures.

  (a) Quelle quantité de médicament a été prise initialement?

  (b) Quel pourcentage du médicament est éliminé par le corps chaque heure?

  (c) Quelle quantité du médicament reste-t-il dans le corps 6 heures après l'ingestion?

  (d) Combien de temps s'écoulera-t-il avant qu'il ne reste que 1 mg du médicament dans le corps?

  (RF9.3)

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes à l'aide du tableau ci-dessous :

Lieu et date	Magnitude
Tchernobyl- 1987	4
Haïti – 12 janvier 2012	7
Nord de l'Italie – 20 mai 2012	6

(i) Combien de fois le tremblement de terre de Tchernobyl a été plus intense que le tremblement de terre en Haïti?

(ii) Combien de fois le tremblement de terre de l'Italie du Nord a été plus intense que le tremblement de terre en Haïti?

(iii) Combien de fois le tremblement de terre de Tchernobyl a été plus intense que le tremblement de terre en Italie du Nord?

(iv) Si un tremblement de terre récent était moitié aussi intense que celui en Haïti, quelle en serait la magnitude approximativement?

(RF9.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.4 Les équations logarithmiques et exponentielles

MÉ: pp. 404-415

TR: pp. 214-218

Relations et Fonctions

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élèves doit pouvoir
RF9 Suite ...

Indicateurs de rendement:

RF9.4 *Résoudre un problème comportant l'application d'équations exponentielles aux prêts, aux hypothèques et aux placements.*

RF9.5 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves devraient aussi réviser des questions de nature financières. Dans l'unité précédente, les élèves ont vu des situations où les bases pouvaient être écrites de la même manière. Ils travailleront maintenant sur des questions comportant des équations logarithmiques. Il pourrait être nécessaire de faire un retour sur les différentes périodes de composition des intérêts.

La formule $A = A_0(1 + r)^n$ peut être utile dans les calculs financiers; A_0 représente la valeur initiale, r est le taux d'intérêt par période de composition et n correspond au nombre de périodes de composition. Par exemple, si 1000$ sont déposés dans une banque qui offre 12% d'intérêt composé mensuellement, les élèves doivent être en mesure de déterminer, en utilisant les logarithmes, combien de temps il faudra pour que l'investissement atteigne 2000$. Les élèves devraient également voir des situations où il est nécessaire de déterminer la valeur initiale, le taux d'intérêt ou le nombre de périodes de composition.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de créer un organigramme des étapes nécessaires pour résoudre les équations exponentielles et un organigramme des étapes nécessaires pour résoudre les équations logarithmiques. Demandez-leur ensuite de comparer les similarités entre les organigrammes. Demandez leur s'il serait possible de concevoir un organigramme couvrant les deux types d'équations.

(RF9)

Performance

- Les élèves peuvent travailler en groupes de deux pour l'activité *Passez le problème.* Chaque groupe reçoit un problème dans lequel une situation doit être modélisée à l'aide d'une équation exponentielle ou logarithmique. Demander à un élève d'écrire la première ligne de la solution puis de passer au deuxième élève. Le deuxième élève vérifie les calculs. S'il y a une erreur, les élèves devraient discuter de la nature de l'erreur et de la raison pour laquelle elle a été commise. L'élève écrit ensuite la deuxième ligne de la solution et la passe à son partenaire. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que la solution soit complète.

(RF9.3, RF9.4, RF9.5, RF9.8)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

8.4 Les équations logarithmiques et exponentielles

MÉ: pp. 404-415

TR: pp. 214-218

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Durée suggérée: 14 heures

Aperçu du module

Orientation et contexte

Dans ce module, les élèves sont initiés au principe fondamental du dénombrement et au concept de dénombrement par permutations, dans lequel l'ordre des éléments de l'expérience est important. Ils sont également initiés à la fonction et à la signification de n!. La capacité de réécrire une factorielle de plusieurs manières différentes peut être utile pour simplifier des expressions à coefficients binomiaux.

Les élèves voient également que le processus de dénombrement des expériences où l'ordre des éléments n'est pas important nécessite une approche différente. À cette fin, ils sont initiés au dénombrement par combinaisons.

Enfin, ils sont initiés au binôme de Newton et à la manière de l'utiliser pour développer un binôme qui est élevé à une puissance. Ils voient que le triangle de Pascal est un modèle utile pour l'écriture des coefficients binomiaux.

Cadre des résultats d'apprentissage

RAG

Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

RAS PCBT1

Appliquer le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes.

RAS PCBT2

Déterminer le nombre de permutations de n éléments pris r à la fois pour résoudre des problèmes.

RAS PCBT3

Déterminer le nombre de combinaisons de n éléments différents pris r à la fois pour résoudre des problèmes.

RAS PCBT4

Effectuer le développement d'un binôme de diverses façons, y compris en ayant recours au binôme de Newton (limité aux exposants qui sont des nombres entiers strictement positifs).

Processus mathématiques

[**C**] Communication
[**L**] Liens
[**RP**] Résolution de problèmes
[**V**] Visualisation
[**CE**] Calcul mental et estimation
[**R**] Raisonnement
[**T**] Technologie

Continuum des résultats d'apprentissage spécifiques

Mathématiques 1231	Mathématiques 2230	Mathématiques 3230
Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton		
AN4. Démontrer une compréhension de la multiplication d'expressions polynomiales (limitées à des monômes, des binômes et des trinômes) de façon concrète, imagée et symbolique. [L, R, V]	AN5. Effectuer des opérations sur des expressions rationnelles (limités aux expressions où les numérateurs et les dénominateurs sont des monômes, des binômes ou des trinômes). [L, CE, R]	PCBT1. Appliquer le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes. [C, RP, R, V] PBCT2. Déterminer le nombre de permutations de n éléments pris r à la fois pour résoudre des problèmes. [C, RP, R, V] PBCT3. Déterminer le nombre de combinaisons de n éléments différents pris r à la fois pour résoudre des problèmes. [C, RP, R, V] PBCT4. Effectuer le développement d'un binôme de diverses façons, y compris en ayant recours au binôme de Newton (limité aux exposants qui sont des nombres entiers strictement positifs). [L, R, V]

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

PCBT1 Appliquer le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes.

[C, RP, R, V]

Indicateur de rendement:

PCBT1.1 *Compter le nombre total de choix possibles à l`aide d'organisateurs graphiques tels que des listes et des diagrammes en arbre.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Le principe fondamental du dénombrement est une méthode permettant de trouver le nombre de façons dont deux ou plusieurs opérations peuvent être effectuées. Il sera abordé par la résolution de problèmes au moyen d'organisateurs graphiques comme des listes, des tableaux et des diagrammes en arbre. Plustard, le principe fondamental du dénombrement sera appliqué à des activités faisant intervenir des permutations et des combinaisons.

Les diagrammes en arbre ont été utilisés en 7e année (7SP5 et 7SP6) et en 8e année (8SP2) pour déterminer le nombre de résultats possibles dans les problèmes de probabilité. Les élèves mettront désormais en pratique les diagrammes en arbre et d'autres organisateurs graphiques dans des problèmes de dénombrement. L'exemple suivant pourrait être utilisé pour activer les apprentissages précédents des élèves :

La cafétéria de l'école annonce qu'elle peut servir jusqu'à 24 repas différents composés d'un élément de chacune des trois catégories :

Fruits: pommes, bananes ou cantaloup

Sandwichs : rôti de bœuf ou dinde rôtie

Boissons : limonade, thé glacé, jus d'orange ou jus d'ananas

Leur annonce est-elle exacte?

	Fruits	Sandwichs	Boissons
Repas avec Pommes	P	B	L
	P	B	T
	P	B	O
	P	B	A
	P	D	L
	P	D	T
	P	D	O
	P	D	A
Repas avec Bananes	B	B	L
	B	B	T
	B	B	O
	B	B	A
	B	D	L
	B	D	T
	B	D	O
	B	D	A
Repas avec Cantaloup	C	B	L
	C	B	T
	C	B	O
	C	B	A
	C	D	L
	C	D	T
	C	D	O
	C	D	A

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Jill essaie de sélectionner un nouveau téléphone cellulaire en fonction des facteurs suivants :

  Marques : As, Meilleur, Joli

  Couleurs : vert lime, magenta, bleu marine, orange

  Forfaits : texte, appels illimités

  Demander aux élèves de construire un diagramme en arbre, une table et une liste structurée pour déterminer le nombre de façons dont Jill peut choisir son nouveau téléphone cellulaire.

(PCBT1.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

Manuel de l'élève (MÉ):
pp. 516-527

Guide d'enseignement (GE):
pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

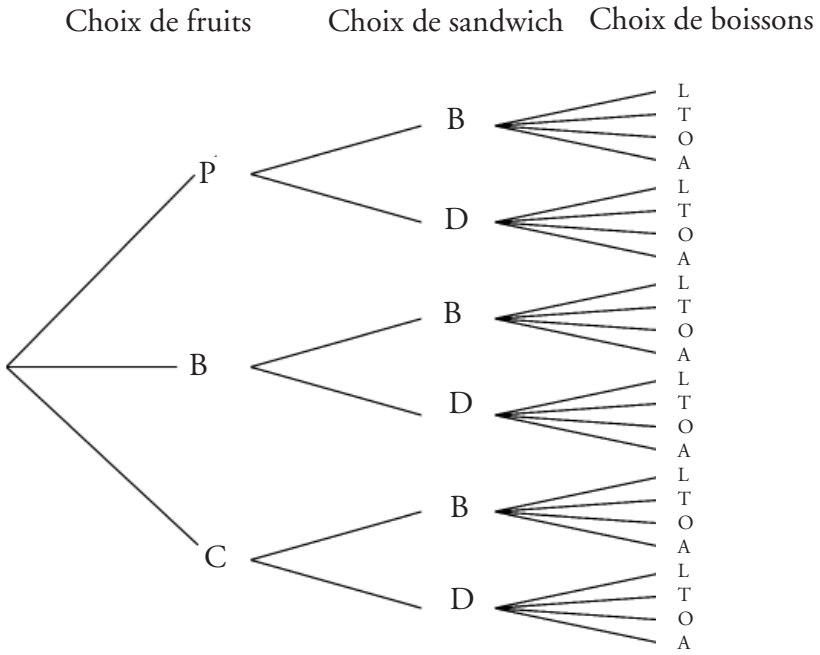
Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
PCBT1 suite...

Indicateur de rendement:

PCBT1.1 *Suite*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage



Il devrait être rappelé aux élèves que les possibilités de repas indiquées par la table et le diagramme en arbre pourraient aussi être écrites sous forme de tableau.

Repas avec pommes	Repas avec bananes	Repas avec cantaloup
PBL	BRL	CRL
PBT	BRT	CRT
PBO	BRO	CRO
PBA	BRA	CRA
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Cet exemple peut être modifié pour y inclure une quatrième catégorie ou ajouter plus de choix dans l'une des catégories en vue d'illustrer les limites à l'utilisation des organisateurs graphiques dans les problèmes de dénombrement et d'offrir une bonne introduction au principe fondamental du dénombrement. Il est parfois irréaliste d'essayer de dresser la liste de tous les résultats possibles d'une situation donnée et de les dénombrer, car l'espace échantillon peut être très vaste. Le principe fondamental du dénombrement permet aux élèves de trouver le nombre de résultats possibles, sans en dresser la liste et les compter un à un.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
PCBT1 Suite ...

Indicateurs de rendement:

PCBT1.2 *Expliquer, à l`aide d'exemples, pourquoi le nombre total de choix possibles est le résultat de la multiplication plutôt que l'addition du nombre de choix individuels possibles.*

PCBT1.3 *Résoudre un problème de dénombrement simple en appliquant le principe fondamental du dénombrement.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Dans l'exemple précédent, trois choix de fruits sont offerts. Pour chacun d'eux, il existe deux choix de sandwichs et pour chaque choix de sandwich, il existe quatre choix de boissons. La multiplication du nombre de choix dans chaque catégorie donne le nombre de repas possibles, qui concorde avec le résultat précédent. Cela illustre le principe fondamental du dénombrement, qui stipule que s'il existe a manières d'accomplir une tâche, b manières d'en accomplir une autre et c manières d'en accomplir une troisième, et ainsi de suite, alors le nombre de manières d'accomplir toutes les tâches ensemble égale $a \times b \times c \times \ldots$

Faire remarquer aux élèves que lorsqu'un fruit, un sandwich et une boisson doivent être choisis, le mot « et » indique que ces trois sélections (opérations) sont réalisées ensemble, de sorte que le nombre de manières dont chaque sélection peut être effectuée est multiplié. S'il faut plutôt choisir un fruit ou un sandwich ou une boisson, les possibilités sont :

3 choix de fruits + 2 choix de sandwichs + 4 choix de boissons

= 9 possibilités.

En effet, le problème deviendrait identique à une situation où il n'y aurait que neuf articles sur le menu et où un seul de ces articles pouvait être choisi. Demander aux élèves combien de sélections différentes seraient possibles dans ce cas.

Le but de cette discussion est pédagogique et vise à aider les élèves à comprendre pourquoi, lorsque le principe fondamental du dénombrement est utilisé, les choix individuels sont multipliés plutôt qu'additionnés. Les élèves ne doivent pas être évalués explicitement sur la différence entre « et » et « ou ».

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  Votre cafétéria scolaire offre trois salades, quatre plats principaux, deux légumes et trois desserts.

  À l'aide d'un diagramme en arbre, d'un tableau ou d'une liste, expliquer pourquoi il est logique de multiplier le nombre de choix de chaque catégorie en vue de déterminer le nombre total de repas possibles si un repas comprend une salade, un plat principal, un légume et un dessert.

(PCBT1.2)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  (i) Sheldon a un chandail rouge, un chandail vert et un chandail bleu. Il possède aussi un pantalon brun, un pantalon beige et un pantalon noir. Son tiroir à chaussettes contient une paire de chaussettes noires et une paire de chaussettes grises. Son étagère à chaussures contient une paire de mocassins, une paire d'espadrilles, une paire de bottes en caoutchouc et une paire de chaussures de sport. Déterminer le nombre de manières dont Sheldon peut sélectionner une tenue composée d'un élément de chaque catégorie.

  (ii) À Terre-Neuve-et-Labrador, les plaques d'immatriculation sont composées d'un groupe ordonné lettre-lettre-lettre-chiffre-chiffre-chiffre comme CXT 132.

  (a) Combien de plaques d'immatriculation sont possibles?

  (b) Combien de plaques d'immatriculation sont possibles si aucune lettre ni chiffre ne peut être répété?

  (c) Combien de plaques d'immatriculation sont possibles si les voyelles (a, e, i, o, u) ne sont pas permises?

  (iii) Les codes postaux canadiens sont composés d'un groupe ordonné lettre-lettre-lettre-chiffre-chiffre-chiffre.

  (a) Combien de codes sont possibles, et comment cela se compare-t-il au nombre de plaques d'immatriculation à Terre-Neuve-et-Labrador?

  (b) À Terre-Neuve-et-Labrador, tous les codes postaux commencent par la lettre A. Combien de codes postaux sont possibles?

(PCBT1.3)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

PCBT2 Déterminer le nombre de permutations de n éléments pris r à la fois pour résoudre des problèmes.

[C, RP, R, V]

Indicateurs de rendement:

PCBT2.1 *Compter le nombre d'arrangements possibles des éléments d'un ensemble disposés en rangée à l`aide d'organisateurs graphiques tels que des listes et des diagrammes en arbre.*

PCBT2.2 *Déterminer, sous la forme de notation factorielle, le nombre de permutations de n éléments différents pris n à la fois pour résoudre un problème.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Le concept de permutation sera exploré à l'aide d'organisateurs graphiques. Une formule sera développée et appliquée dans des situations de résolution de problèmes, y compris des problèmes de permutation avec contraintes.

Une permutation est un groupe ordonné de tout ou de partie d'un ensemble. Par exemple, les permutations possibles des lettres A, B et C sont ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA. L'ordre des lettres est important.

Les élèves doivent d'abord être initiés aux permutations de *n* éléments différents pris *n* à la fois, puis passeront aux permutations de *n* éléments différents pris *r* à la fois.

Les élèves doivent apprendre à reconnaître et à utiliser *n*! comme la représentation du nombre de façons dont *n* objets différents peuvent être groupés. Par exemple, de combien de façons différentes peuvent être groupés ou permutées cinq personnes dans une file d'attente?

Personne 1	Personne 2	Personne 3	Personne 4	Personne 5
5 possibilités	4 possibilités restantes	3 possibilités restantes	2 possibilités restantes	1 possibilités restantes

En vertu du principe fondamental du dénombrement, il existe 5 × 4 × 3 × 2 x 1 façons, soit 120 façons.Ce produit peut être exprimé sous la forme abrégée 5! Généralement $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...(2)(1)$, lorsque. $n \in N$.

Prenez note que 0! = 1 sera abordé dans le contexte des permutations après l'introduction de la formule pour ${}_nP_r$.

En vue de se préparer à travailler avec des formules de permutations et de combinaisons, les élèves doivent simplifier des expressions factorielles comme :

- $\dfrac{100!}{97!} = \dfrac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{97!} = 100 \times 99 \times 98$
- $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$
- $\dfrac{3!(n+1)!}{2!(n-2)!} = \dfrac{3 \times 2!(n+1)n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}$
  $= 3(n+1)n(n-1)$
  $= 3n^3 - 3n$

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Performance

- Le code d'une serrure est composé de trois chiffres choisis parmi 0, 1, 2 et 3, sans répétition. Par exemple, le code 1-2-1 ne serait pas permis, mais 3-0-2 serait permis. Demander aux élèves d'utiliser un diagramme en arbre ou un autre organisateur graphique pour déterminer le nombre de codes possibles et expliquer en quoi il s'agit d'un problème de permutation.

(PCBT2.1)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi les cadenas à combinaison typiquement utilisés sur les casiers scolaires doivent plus justement être appelés « cadenas à permutation ».

(PCBT2.1)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :
  (i) De combien de façons différentes cinq livres peuvent-ils être disposés sur une étagère?
  (ii) Dans combien d'ordres différents 15 personnes peuvent-elles être placées dans une file d'attente?

  (iii) Simplifier :
  (a) $\dfrac{1000!}{998!}$
  (b) $\dfrac{1000!}{998!1000}$
  (c) $\dfrac{4!(n+1)!}{3!(n-1)!}$
  (d) $\dfrac{(n+2)!}{(n+4)!}$

  (iv) Déterminer le nombre de façons dont un président, un secrétaire et un trésorier peuvent être choisis d'un groupe de 10 personnes si personne ne peut occuper plus d'une position.

(PCBT2.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
PCBT2 Suite ...

Indicateurs de rendement:

PCBT2.3 *Déterminer, en ayant recours à diverses stratégies, le nombre de permutations de n éléments différents pris r à la fois pour résoudre un problème.*

PCBT2.4 *Expliquer pourquoi n doit être supérieur ou égal à r dans la notation* ${}_nP_r$.

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Résoudre un problème de dénombrement simple peut aider les élèves à trouver une formule permettant de déterminer le nombre de permutations possibles de n éléments différents pris r à la fois, ce qui sera plus efficace dans les cas où la valeur de r est élevée. Demander aux élèves de déterminer de combien de façons il est possible de grouper trois personnes quelconques d'un groupe de cinq personnes placées en file. Ils doivent déduire qu'il y a cinq options pour la première position, quatre options restantes pour la deuxième position et trois options restantes pour la troisième position. En vertu du principe fondamental du dénombrement, il existe 5 x 4 x 3 = 60 permutations. Le symbole couramment utilisé pour représenter cette situation est ${}_5P_3$ ou ${}_nP_r$ pour un nombre d'objets « n » pris « r » à la fois. Les élèves doivent remarquer que ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3$ ou ${}_5P_3 = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}$. Ce qui peut aussi être exprimé sous la forme ${}_5P_3 = \frac{5!}{2!}$ ou ${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!}$.

En général, le nombre de permutations de n objets pris r à la fois est donné par :

$${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots(3)(2)(1)}$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Continuer de mettre l'accent sur le fait que dans la notation ${}_nP_r$, n_r n est le nombre d'éléments dans l'ensemble et r est le nombre d'éléments pris de l'ensemble. Les élèves devraient se rendre compte que r ne peut pas être supérieur à n puisqu'il n'est pas possible de prendre plus d'éléments que ce qui existe en réalité dans l'ensemble. Si ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, était utilisée avec un r supérieur à n, le dénominateur contiendrait une factorielle d'un nombre négatif, ce qui est indéfini.

Les élèves doivent remarquer que le nombre de permutations de six personnes placées en file correspond à 6!. Il s'agit aussi d'une permutation d'un ensemble de six objets tirés d'un ensemble de 6. Par conséquent, en appliquant la formule ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, on obtient ${}_6P_6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!}$. Cela signifie $6! = \frac{6!}{0!}$, et la seule valeur de 0! qui ait du sens est 0! = 1.

L'évaluation de 0! revient à déterminer le nombre de façons dont un ensemble vide peut être compté. Comme il n'y a rien à compter, demander aux élèves : *De combien de façons pouvez-vous compter rien?* La réponse mathématique à cette question est « une ».

Pour n objets pris n à la fois, le nombre de permutations correspond à $n! = {}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$. Encore une fois, 1 est la seule valeur réaliste de 0!

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :
  - (i) Combien de numéros à deux chiffres peuvent être formés à partir des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 si la répétition est permise?

    (PCBT2.3)
  - (ii) Combien de groupes ordonnés distincts peuvent être formés à partir des lettres du mot GYMNASE?

    (PCBT2.3)
  - (iii) Le code d'un cadenas est constitué de quatre chiffres choisis entre 0, 1, 2 et 3, sans répétition. Par exemple, le code 1-2-1-3 ne serait pas permis, mais 3-0-2-1 serait permis. À l'aide de la formule de permutation, déterminer le nombre de codes possibles.

    (PCBT2.4)

Journal

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :
  - (i) Un code est composé de trois lettres de A à Z et trois chiffres entre 0 et 9, sans répétition de lettres ou de chiffres. Expliquer pourquoi le nombre total de codes possibles peut être trouvé au moyen de l'expression ${}_{26}P_3 \times {}_{10}P_3$.

    (PCBT2.3)
  - (ii) Expliquer pourquoi il est impossible de calculer ${}_5P_7$ sur une calculatrice.

    (PCBT2.4)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

PCBT2 Suite ...

Indicateur de rendement:

PCBT2.5 *Étant donné la valeur de k, k ϵ N, résoudre une équation comportant la notation* ${}_nP_r = k$ *pour n ou r.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

La connaissance des permutations peut être appliquée pour résoudre des équations de la forme ${}_nP_r = k$. Les élèves doivent résoudre des équations comme les suivantes, dont beaucoup exigeront la simplification d'expressions rationnelles semblables au travail effectué dans le module Mathématiques 2230 (AN5). Une fois l'expression simplifiée au point où elle ne contient plus de factorielles, les élèves réexaminent les apprentissages antérieurs sur les expressions rationnelles.

Exemple 1

$${}_nP_2 = 30$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30$$

$$n(n-1) = 30$$

- Les élèves peuvent comprendre que des entiers consécutifs donnant un produit de 30 sont nécessaires, puisque $6(6 - 1) = 30$, $n = 6$.
- Autrement, ils peuvent résoudre l'équation quadratique $n^2 - n - 30 = 0$. Les racines de cette équation sont 6 et −5. Comme n doit être positif, −5 est étranger.

Exemple 2

$${}_{n-1}P_2 = 12$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} = 12$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 12$$

$$(n-1)(n-2) = 12$$

- Les élèves pourraient comprendre que des entiers consécutifs dont le produit est 12 résoudront l'équation. Par conséquent $n = 5$ puisque $(5 - 1)(5 - 2) = 12$.
- Ils pourraient aussi résoudre l'équation quadratique $n^2 - 3n + 2 = 12$ et déterminer que $n = 5$ (−2 est une racine étrangère).

Exemple 3

$${}_5P_r = 5!$$

$$\frac{5!}{(5-r)!} = 5!$$

$$(5-r)! = 1$$

Pour résoudre cette équation, les élèves doivent se souvenir que $1! = 1$ et $0! = 1$. Par conséquent, $5 - r = 1$ ou $5 - r = 0$, ce qui donne $r = 4$, $r = 5$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de résoudre les équations suivantes :

  (i) ${}_{n}P_{2} = 42$

  (ii) ${}_{8}P_{r} = 8!$

  (iii) ${}_{n+1}P_{2} = 20$

  (iv) ${}_{n+4}P_{3} = 120$

- Demander aux élèves de répondre à la question suivante :

  Denise a une série d'affiches à disposer sur le mur de sa chambre. Elle ne peut placer que deux affiches côte à côte. S'il y a 72 façons de grouper les affiches, combien d'affiches possède-t-elle en tout?

(PCBT2.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
PCBT2 Suite ...

Indicateur de rendement:

PCBT2.6 *Expliquer, à l'aide d'exemples, l'effet d'au moins deux nombres d'éléments identiques sur le nombre total de permutations.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Lorsqu'ils doivent déterminer le nombre total de permutations de plusieurs éléments identiques, les élèves travaillent avec un ensemble de n éléments pris n à la fois. Ils doivent résoudre et expliquer leur solution à un problème comme le suivant :

Quatre perles, une bleue, deux rouges et une jaune, sont placées sur un fil. Combien de groupes ordonnés différents sont possibles?

Une liste systématique est une des stratégies permettant de déterminer le nombre total de groupes ordonnés.

Rbrj	Rrjb	jbrR	jbRr	bRrj	brRj	rbRj	rRjb
Rbjr	Rjrb	jrbR	jRbr	bRjr	brjR	rbjR	rjRb
Rrbj	Rjbr	jrRb	jRrb	bjRr	bjrR	rRbj	rjbR

Les élèves pourraient aussi se rappeler que quatre objets peuvent avoir $4! = 24$ différentes permutations. Cependant, avec deux perles rouges identiques, certaines permutations se répètent, comme Rbrj et rbRj. Si les perles rouges étaient différentes, elles pourraient être disposées de 2! façons. Par conséquent, le nombre total de permutations avec les perles identiques est des $\frac{4!}{2!}$ ou 12.

En général, dans un ensemble de n objets dont a sont d'un type identique, b d'un second type identique, c d'un troisième type identique, et ainsi de suite, l'ensemble de n objets peut être groupé de $\frac{n!}{a!b!c!\ldots}$ manières. Par exemple, s'il y avait une perle bleue, deux perles rouges, une perle blanche et trois perles noires dans le problème précédent, le nombre d'arrangements possibles pour les sept perles serait de $\frac{7!}{2!3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3!}{2!3!} = 420$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  (i) Montrer que vous pouvez former 120 groupes ordonnés de cinq lettres différentes à partir du mot GRAND, mais seulement 60 groupes ordonnés de cinq lettres différentes à partir du mot GRILL.

  (PCBT2.6)

  (ii) Combien groupes ordonnés différents peuvent être formés en utilisant toutes les lettres de STATISTIQUE?

  (PCBT2.6)

  (iii) Trouver le nombre total de groupes ordonnés des lettres du mot SOIE et le nombre total d'arrangements des lettres du mot SOIS. Comment se comparent vos réponses? Expliquer cette relation.

  (PCBT2.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
PCBT2 Suite ...

Indicateur de rendement:

PCBT2.7 *Résoudre des problèmes de permutations avec des contraintes.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Diverses contraintes peuvent être imposées dans les problèmes de permutation. Dans certaines situations, par exemple, des objets doivent être disposés dans une ligne où :

- plusieurs objets doivent être placés ensemble
- plusieurs objets ne peuvent pas être placés ensemble
- un ou plusieurs objets doivent être placés à une position donnée

Les élèves doivent répondre à des questions comme les suivantes :

Combien de façons existe-t-il de placer cinq personnes en file si deux d'entre elles sont de bons amis et veulent être assis ensemble?

Si les cinq personnes sont A, B, C, D et E, et les amis sont A et B :

- Les deux amis peuvent s'asseoir ensemble comme AB ou BA. Les élèves doivent comprendre qu'il s'agit de 2! façons.
- Le problème peut être simplifié un peu en considérant d'abord A et B comme une seule personne. Les élèves peuvent alors considérer temporairement que le problème consiste à grouper quatre personnes différentes, ce qui peut être fait de 4! façons.
- En vertu du principe fondamental du dénombrement, les cinq personnes peuvent être disposées de 4!2! = 48 façons.

De même, si trois amis avaient voulu s'asseoir ensemble, les cinq personnes pourraient être groupées de 3!3! = 36 manières.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  Alice, Béatrice, Colin et David doivent former une ligne de gauche à droite.

  (i) De combien de façons peuvent-ils être placés?

  (ii) De combien de façons peuvent-ils être placés si Alice et David ne peuvent pas être côte à côte?

  (iii) De combien de façons peuvent-ils être placés si Béatrice et Colin doivent être côte à côte?

  (iv) De combien de façons peuvent-ils être placés si Alice doit être à une extrémité de la ligne?

(PCBT2.7)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.1 Les permutations

MÉ: pp. 516-527

GE: pp. 280-286

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

PBCT3. Déterminer le nombre de combinaisons de *n* éléments différents pris *r* à la fois pour résoudre des problèmes.

[C, RP, R, V]

Indicateurs de rendement:

PCBT3.1 *Expliquer, à l'aide d'exemples, la différence entre une permutation et une combinaison.*

PCBT3.2 *Déterminer le nombre de combinaisons de n éléments différents pris r à la fois pour résoudre un problème.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Contrairement aux permutations, les combinaisons sont un arrangement d'objets où l'ordre n'est pas important. Une formule sera développée et appliquée dans des situations de résolution de problèmes.

Pour distinguer les permutations et les combinaisons, les élèves doivent avoir une situation de chaque type où le nombre de possibilités peut être déterminé par des méthodes de dénombrement simples.

- Adam, Marie et Brian sont debout dans une file au guichet automatique. De combien de façons pourraient-ils être placés?
- Paul, Renée et Émilie sont membres d'un comité. De combien de façons deux d'entre eux pourraient-ils être choisis pour participer à une conférence?

La différence fondamentale entre ces deux situations doit être expliquée et soulignée. Les élèves doivent déjà reconnaître que le premier problème concerne des permutations, dans lesquelles l'ordre est important. Utiliser le deuxième problème pour les initier aux combinaisons, dans lesquelles l'ordre n'est pas important.

Une situation comme la suivante pourrait également servir à mettre en évidence la différence entre les permutations et les combinaisons.

Dans une loterie, six nombres de 1 à 49 sont pigés. Un billet gagnant doit contenir les six nombres pigés, mais ils peuvent être dans n'importe quel ordre.

Si l'ordre était important, le nombre de permutations serait de ${}_{49}P_6 = \frac{49!}{(49-6)!} = 10\ 068\ 347\ 520.$ Puisque l'ordre n'a pas d'importance, le nombre de permutations doit être divisé par 6! (le nombre de manières de grouper les six nombres pigés). Le nombre de combinaisons est de ${}_{49}C_6 = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{6!} = 13\ 983\ 816.$

Discuter avec les élèves de la raison pour laquelle le nombre de combinaisons est inférieur au nombre de permutations.

En général, étant donné un ensemble de *n* objets pris *r* à la fois, le nombre de combinaisons possibles est de ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Noter que la notation $\binom{n}{r}$ est parfois utilisée à la place de ${}_nC_r$.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de déterminer quel problème devrait être résolu au moyen du principe fondamental de dénombrement, quel problème devrait être résolu au moyen de la formule de permutation et quel problème devrait être résolu au moyen de la formule de combinaison. Ils doivent expliquer leurs choix.
  (i) De combien de façons est-il possible de choisir un comité de trois personnes dans un groupe de 12 personnes?
  (ii) De combien de façons peuvent trois personnes sur huit se mettre en ligne à une billetterie?
  (iii) Combien de nombres à quatre chiffres existe-t-il?

(PCBT3.1)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :
  (i) Alain, Guillaume, Catherine, David et Éliane sont membres du même club. Déterminer le nombre de façons dont il est possible de sélectionner :
  a) un comité de deux membres
  b) un président et un trésorier

  (ii) Chacun des 48 élèves de la classe de finissants à l'école secondaire locale aimerait assister à une conférence spéciale sur le leadership, mais seulement dix personnes seront autorisées à y assister. Combien de manières y a-t-il de sélectionner les dix chanceux?

(PCBT3.2)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.2 Les combinaisons

MÉ: pp. 528-536

GE: pp. 287-292

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

PCBT3 Suite ...

Indicateurs de rendement:

PCBT3.2 *Suite*

PCBT3.3 *Expliquer pourquoi n doit être supérieur ou égal à r dans la notation* ${}_nC_r$ *ou* $\binom{n}{r}$.

PCBT3.4 *Expliquer, à l'aide d'exemples, pourquoi* ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ *ou* $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

PCBT3.5 *Étant donné la valeur de k, k ϵ N, résoudre* ${}_nC_r = k$ *ou* $\binom{n}{r} = k$ *pour n ou r.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves doivent aussi résoudre des problèmes comme les suivants, où ils doivent appliquer à la fois leurs connaissances sur les combinaisons et sur le principe fondamental de dénombrement.

Une équipe de baseball compte cinq lanceurs, six voltigeurs et 10 joueurs de champ intérieur. Pour une partie, le gérant doit aligner un groupe de départ comptant un lanceur, trois joueurs du grand champ et cinq joueurs de champ intérieur. De combien de façons peut-il sélectionner le groupe de départ?

- Il y a ${}_5C_1$, ou 5, façons de sélectionner un lanceur.
- Il ya ${}_6C_3$, ou 20, façons de sélectionner les joueurs du grand champ.
- Il ya ${}_{10}C_5$, ou 252 façons de sélectionner les joueurs de champ intérieur.

Les élèves peuvent appliquer le principe fondamental de dénombrement pour déterminer qu'il y a 25 200 façons de sélectionner le groupe de départ.

Les élèves doivent être en mesure de vérifier facilement que la valeur de n doit être supérieure ou égale à celle de r dans ${}_nC_r$, pour les raisons expliquées dans la partie portant sur les permutations. S'ils comprennent que la notation ${}_nC_r$ signifie choisir r éléments d'un ensemble de n éléments, il s'ensuit naturellement que r ne peut pas être plus grand que n.

Pour comprendre pourquoi ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$, un problème comme le suivant pourrait être utilisé :

Supposons que les lettres A, B, C, D et E sont placées dans un sac et que deux lettres sont pigées au hasard. Combien de combinaisons de lettres peuvent être sélectionnées?

La plupart des élèves détermineront le nombre de combinaisons de deux lettres à ${}_5C_2 = \frac{5!}{3!2!}$. Incitez-les à trouver une autre façon de résoudre le problème. Il peut être pris « à l'envers ». Chaque fois que deux lettres sont pigées, trois lettres sont aussi laissées dans le sac. Le nombre de combinaisons de trois lettres est ${}_5C_3 = \frac{5!}{2!3!}$. Les élèves doivent conclure que ${}_5C_2 = {}_5C_{5-2}$ et, généralement ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$. Une preuve algébrique de ce résultat peut être présentée, mais ne constitue pas un apprentissage obligatoire pour les élèves.

Les élèves doivent résoudre une variété d'équations où n ou r est inconnu.

${}_nC_2 = 15$ ${}_6C_r = 15$ ${}_nC_{n-2} = 15$ $\binom{n}{2} = 15$

Pour résoudre une équation comme ${}_6C_r = 15$, les élèves doivent se rendre compte que $r \leq 6$ puisque r éléments sont choisis parmi un ensemble de six éléments. La vérification de chacune des possibilités donne la solution $r = 2$, $r = 4$. Pour ce type d'équation, des nombres faciles à utiliser qui permettent d'utiliser une stratégie d'essais et erreurs doivent être utilisés.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  (i) Un ensemble de fiches comprend 13 fiches rouges, 13 fiches bleues, 13 fiches noires et 13 fiches jaunes. Les fiches de chaque couleur sont numérotées de 1 à 13.

  (a) Combien de groupes de cinq fiches est-il possible de sélectionner dans l'ensemble?

  (b) Combien de groupes de cinq fiches est-il possible de sélectionner parmi les fiches rouges?

  (c) Combien de groupes de 20 fiches est-il possible de sélectionner dans l'ensemble s'il doit y en avoir au moins cinq de chaque couleur?

  (ii) Combien de sommes d'argent différentes peuvent être obtenues en sélectionnant quatre pièces dans un ensemble composé d'une pièce de cinq cents, d'une pièce d'un cent, d'une pièce de vingt-cinq cents, d'une pièce d'un dollar et d'une pièce de deux dollars?

  (PCBT3.2)

- Demander aux élèves de résoudre les équations suivantes :

  (i) $\binom{n+1}{1} = 20$

  (ii) ${}_7C_r = 21$

  (iv) ${}_{n+1}C_{n-1} = 6$

  (PCBT3.5)

Journal

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi il est impossible de calculer ${}_5C_7$ sur une calculatrice, sans une erreur.

  (PCBT3.3)

- Demander aux élèves d'expliquer pourquoi les façons de sélectionner huit personnes parmi un groupe de dix est le méme que les façons de sélectionner deux personnes parmi un groupe de dix.

  Ils doivent ensuite débattre à savoir si le nombre d'arrangements possibles pour huit ou deux personnes serait toujours égal s'il s'agissait d'un problème de permutation où les personnes sélectionnées devaient être placées à des positions données.

  (PCBT3.4)

- Demander aux élèves d'expliquer comment ils pourraient résoudre l'équation $6({}_nC_3) = 6$ en utilisant leurs connaissances sur les combinaisons plutôt qu'une solution algébrique.

  (PCBT3.5)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.2 Les combinaisons

MÉ: pp. 528-536

GE: pp. 287-292

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:

PCBT4 Effectuer le développement d'un binôme de diverses façons, y compris en ayant recours au binôme de Newton (limité aux exposants qui sont des nombres entiers strictement positifs).

[L, R, V]

Indicateurs de rendement:

PCBT4.1 *Expliquer les régularités dans le développement de $(x + y)^n$, $n \leq 4$ et $n \in N$, en multipliant n facteurs de $(x + y)$.*

PCBT4.2 *Expliquer comment déterminer la rangée suivante dans le triangle de Pascal à partir de n'importe quelle rangée.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

Les élèves développent un binôme au moyen du triangle de Pascal et du binôme de Newton. Ils voient que si le triangle de Pascal est déjà rempli pour le développement en question, la rangée pertinente peut être lue sans autre calcul. Ils doivent également voir que l'un des désavantages du triangle de Pascal est que chacune des rangées précédentes doit être remplie avant d'obtenir la rangée nécessaire au développement. Cela mène au développement du binôme de Newton.

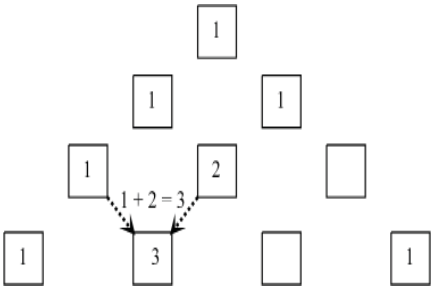
Dans le cours Mathématiques 1231, les élèves ont multiplié des expressions polynomiales, y compris des monômes, des binômes et des trinômes (AN4). Ils doivent procéder au développement des binômes suivants de manière algébrique et noter les coefficients des termes :

Expression	Coefficients des termes
$(x + y)^0 = 1$	
$(x + y)^1 = x + y$	
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	

Les élèves doivent rechercher des schémas dans les exposants des termes de chaque développement.

- Comment l'exposant du binôme est-il lié aux exposants des premier et dernier termes du développement?
- En procédant de gauche à droit pour chaque développement, quels schémas peut-on observer dans les exposants de x et de y?

Les élèves doivent également rechercher des schémas dans le triangle. Par exemple, chaque élément correspond à la somme des deux éléments situés au-dessus.



Cette activité consiste à développer les éléments des rangées 1 à 5 du triangle de Pascal, un disposition triangulaire de nombres décrit par Blaise Pascal en 1653. Grâce à cette activité, les élèves doivent être capables d'expliquer comment déterminer les éléments de n'importe quelle rangée une fois que la rangée précédente est connue.

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élèves de décrire la régularité formée par les exposants de x et de y dans un développement comme $(x + y)^4$.

(PCBT4.1)

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

  Supposer qu'un ami a manqué le cours dans lequel vous avez appris à construire le triangle de Pascal. Écrire une liste des étapes que vous lui dire de suivre pour construire le triangle par lui même.

(PCBT4.2)

Papier et crayon

- En fonction de ce qui a été observé pour des développements de puissances jusqu'à $n = 4$, demander aux élèves de prédire les exposants pour le 5e terme dans le développement de $(x + y)^7$.

(PCBT4.1)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.3 Le binôme de Newton

MÉ: pp. 537-545

GE: pp. 296-301

Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton

Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir:
PCBT4 Suite ...

Indicateurs de rendement:

PCBT4.3 *Établir le lien entre les coefficients des termes dans le développement de $(x + y)^n$ et la $(n + 1)$ rangée du triangle de Pascal..*

PCBT4.4 *Expliquer, à l'aide d'exemples, comment les coefficients des termes dans le développement de $(x + y)^n$ sont déterminés par des combinaisons.*

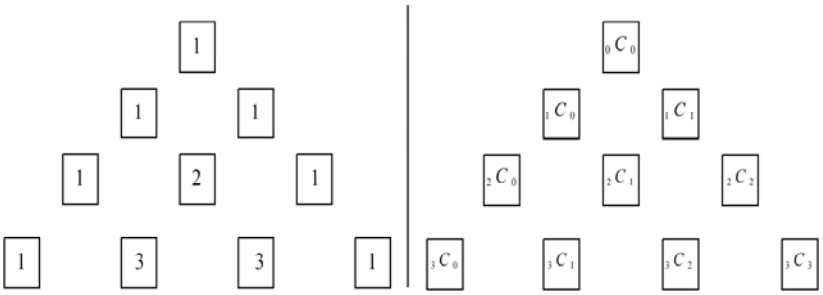
PCBT4.5 *Effectuer le développement de $(x + y)^n$ en ayant recours au binôme de Newton.*

PCBT4.6 *Déterminer un terme particulier du développement d'un binôme.*

Stratégies d'enseignement et d'apprentissage

À l'aide du triangle de Pascal, les élèves doivent maintenant aussi être en mesure de déterminer le développement de $(x + y)^n$ pour toute valeur de n où $n \leq 12$.

Les éléments de chaque rangée du triangle de Pascal peuvent être déterminés à l'aide de la formule ${}_nC_r$, comme le montre le diagramme.



À l'aide de leurs connaissances sur les combinaisons, les élèves doivent être en mesure de prédire l'élément ou le coefficient de n'importe quel élément dans le développement de $(x + y)^n$. Dans le développement de $(x + y)^7$, par exemple, le coefficient de x^3y^4 est ${}_7C_4 = 35$. Généralement, le développement de $(x + y)^n$ correspond à :

$$ {}_nC_0x^ny^0 + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}_nC_{n-1}x^1y^{n-1} + {}_nC_nx^0y^n $$

C'est ce qu'on nomme le binôme de Newton.

Les élèves doivent maintenant appliquer le binôme de Newton au développement d'autres binômes, tels que :

- $(2a + b)^7$
- $\left(\frac{x}{3} - 2\right)^5$
- $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$

Résultat d'apprentissage général: Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.

Stratégies d'évaluation

Journal

- Demander aux élevés à répondre aux questions suivantes :

i) Expliquer en quoi le triangle de Pascal facilite le développement des binômes lorsqu'il est question d'exposants élevés.

ii) Y aurait-il des inconvénients à utiliser le triangle de Pascal si vous vouliez trouver un seul terme dans un développement de binôme à l'exposant très élevé?

(PCBT4.3)

Papier et crayon

- Demander aux élèves de répondre aux questions suivantes :

(i) Les combinaisons permettent de trouver un coefficient particulier dans un développement de binôme.

(a) Quelle rangée et quel élément du triangle de Pascal permettraient d'accomplir la même tâche?
(b) Quel exposant est utilisé pour développer le binôme?
(c) À quel terme du développement correspond le coefficient obtenu?
(d) Quels seront les exposants des variables pour ce terme particulier?
(e) Quel sera le coefficient le plus élevé dans ce développement?

(PCBT 4.4)

(ii) Développer et simplifier chacun des éléments suivants :

(a) $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^4$
(b) $(1-5y)^3$
(c) $\left(\frac{x}{2}+4\right)^6$
(d) $\left(x^2-\frac{3}{x^2}\right)^{12}$

(PCBT 4.5)

(iii) Déterminer le terme du milieu dans le développement de $(2c + 3d)^6$.

(PCBT 4.6)

(iv) Trouver le terme indiqué dans chacun des développements suivants :

(a) Le deuxième terme de $(5 + x)^6$
(b) Le cinquième terme de $(x + 7)^7$
(c) Le troisième terme de $(x - 2)^6$
(d) Le troisième terme de $(2x + 3y)^7$
(e) Le quatrième terme de $(3x - 7y)^5$

(PCBT 4.6)

Ressources et notes

Ressource autorisée

Mathématiques pré-calcul 12

11.3 Le binôme de Newton

MÉ: pp. 537-545

GE: pp. 296-301

Annexe:

Liste des résultats d'apprentissage et indicateurs de rendement (incluant les pages de référence au programme d'études)

Domaine: Relations et Fonctions	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de Référence**
RF1. Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V]	RF1.1 Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y - k = f(x)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de k.	p. 42
	RF1.2 Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(x - \mathrm{h})$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de h.	p. 42
	RF1.3 Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y - k = f(x - \mathrm{h})$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant aux effets de h et de k.	p. 42
	RF1.4 Esquisser le graphique de $y - k = f(x)$, de $y = f(x - \mathrm{h})$ ou de $y - k = f(x - \mathrm{h})$ pour des valeurs données de h et de k à partir d'une esquisse de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.	p. 42
	RF1.5 Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une translation verticale et/ou horizontale du graphique de la fonction $y = f(x)$.	p. 44
RF2. Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V]	RF2.1 Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = af(x)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de a.	p. 48
	RF2.2 Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(bx)$ au graphique de $y = f(x)$, et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif une règle générale, quant à l'effet de b.	p. 50
	RF2.3 Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = af(bx)$ au graphique de $y = f(x)$, et formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, une règle générale quant aux effets de a et b.	p. 52
	RF2.4 Esquisser le graphique de $y = af(x)$, $y = f(bx)$ ou $y = af(bx)$ pour des valeurs données de a et b, à partir d'une esquisse de la fonction $y = f(x)$, où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.	p. 54
	RF2.5 Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction étant donné le graphique représentant un étirement vertical et/ou horizontal du graphique de la fonction $y = f(x)$.	p. 54

Domaine: Relations et fonctions	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.	
Résultats d'apprentissage spécifiques *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de Référence**
RF3. Appliquer des translations et des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives. [C, L, R, V]	RF3.1 Esquisser le graphique de la fonction $y - k = af(b(x - h)$ pour des valeurs données de a, b, h et k, à partir du graphique donné de la fonction $y = f(x)$, où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.	p. 56
	RF3.2 Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction à partir du graphique représentant une translation et/ou un étirement du graphique de la fonction $y = f(x)$.	p. 58
RF4. Démontrer une compréhension des effets de an réflexions (rabattements) sur les graphiques des fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions (rabattements) par rapport à: • L'axe des x • L'axe des y • La droite $y = x$. [C, L, R, V]	RF4.1 Formuler la relation générale entre les coordonnées d'un point et celles du point obtenu par réflexion par rapport à l'axe des x ou l'axe des y.	p. 46
	RF4.2 Esquisser le résultat d'une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x ou l'axe des y, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.	p. 46
	RF4.3 Formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, et expliquer une règle générale relative à la réflexion (rabattement) du graphique d'une fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x ou l'axe des y.	p. 46
	RF4.4 Esquisser les graphiques des fonctions $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ et $x = -f(y)$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.	p. 46
	RF4.5 Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x ou l'axe des y.	p. 46
	RF4.6 Formuler la relation générale entre les coordonnées d'un point et celles du point obtenu par réflexion par rapport à la droite $y = x$.	p. 60
	RF4.7 Esquisser le résultat d'une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.	p. 62
	RF4.8 Formuler, en ayant recours au raisonnement inductif, et expliquer une règle générale relative à la réflexion (rabattement) du graphique d'une fonction $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.	p. 62
	RF4.9 Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$.	p. 66

Domaine: Relations et Fonctions	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
RF5. Démontrer une compréhension des réciproques de relations. [C, L, R, V]	RF5.1 Expliquer comment la transformation $(x, y) \rightarrow (y, x)$ peut être utilisée pour esquisser la réciproque d'une relation.	p. 60
	RF5.2 Expliquer la relation entre les domaines et les images d'une relation et de sa réciproque.	p. 60
	RF5.3 Expliquer comment le graphique de la droite $y = x$ peut être utilisé pour esquisser la réciproque d'une relation.	p. 62
	RF5.4 Esquisser, à partir du graphique de la relation, le graphique de sa réciproque.	p. 62
	RF5.5 Déterminer si une relation et sa réciproque sont des fonctions.	p. 64
	RF5.6 Déterminer les restrictions qui doivent être apportées au domaine d'une fonction pour que sa réciproque soit une fonction.	p. 66
	RF5.7 Déterminer l'équation et esquisser le graphique de la réciproque étant donné l'équation d'une relation linéaire ou quadratique.	p. 66
	RF5.8 Déterminer, algébriquement ou graphiquement, si deux fonctions sont des réciproques l'une de l'autre.	p. 66
RF6. Démontrer une compréhension des logarithmes. [L, CE, R]	RF6.1 Expliquer la relation entre les logarithmes et les exposants.	p. 160
	RF6.2 Exprimer une expression logarithmique sous la forme d'une expression exponentielle et vice-versa.	p. 160
	RF6.3 Déterminer la valeur exacte d'un logarithme tel que $\log_2 8$, sans l'aide de la technologie.	p. 160
	RF6.4 Estimer la valeur d'un logarithme, à l'aide de points de repère, et expliquer le raisonnement, p. ex.: vu que $\log_2 8 = 3$ et que $\log_2 16 = 4$, alors $\log_2 9$ est égal à environ 3,1.	p. 160
RF7. Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances. [C, L, CE, R, T]	RF7.1 Développer et formuler des lois générales pour les logarithmes à l'aide d'exemples numériques et des lois des exposants.	p. 168
	RF7.2 Formuler chacune des lois des logarithmes.	p. 168
	RF7.3 Déterminer, à l'aide des lois des logarithmes, une expression équivalente à une expression logarithmique.	p. 170
	RF7.4 Déterminer, à l'aide de la technologie, la valeur approximative d'une expression logarithmique, telle que $\log_2 9$.	p. 170

Domaine: Relations et Fonctions	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
RF8. Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques. [C, L, T, V]	RF8.1 Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, un graphique d'une fonction exponentielle de la forme $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$.	p. 142-144
	RF8.2 Identifier les caractéristiques du graphique d'une fonction exponentielle de la forme, $y = c^x$, $c > 0$, $c \neq 1$, y compris le domaine, l'image, l'asymptote horizontale et les coordonnées à l'origine, et expliquer la signification de l'asymptote horizontale.	p. 142-144
	RF8.3 Esquisser le graphique d'une fonction exponentielle en appliquant un ensemble de transformations au graphique de $y = cx,\ c > 0,\ c\ ^1\ 1$ et indiquer les caractéristiques du graphique.	p. 146
	RF8.4 Démontrer, graphiquement, qu'une fonction logarithmique et une fonction exponentielle de même base sont des réciproques l'une de l'autre.	p. 162
	RF8.5 Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique d'une fonction logarithmique de la forme $y = \log_c x,\ c > 1$.	p. 164
	RF8.6 Identifier les caractéristiques du graphique d'une fonction logarithmique de la forme $y = \log_c x,\ c > 1$, y compris le domaine, l'image, l'asymptote verticale et les coordonnées à l'origine, et expliquer la signification de l'asymptote verticale.	pp. 164-166
	RF8.7 Esquisser le graphique d'une fonction logarithmique en appliquant un ensemble de transformations au graphique de $y = \log_c x$, $c > 1$, et indiquer les caractéristiques du graphique.	pp. 164-166

Domaine: Relations et Fonctions	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
RF9. Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques. [C, L, RP, R]	RF9.1 Déterminer la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases sont des puissances les unes des autres.	p. 148
	RF9.2 Déterminer, à l'aide d'une variété de stratégies, la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases ne sont pas des puissances les unes des autres.	p. 148-150, 172
	RF9.3 Résoudre un problème comportant de la croissance exponentielle ou de la désintégration.	p. 152-154, 174
	RF9.4 Résoudre un problème comportant l'application d'équations exponentielles aux prêts, aux hypothèques et aux placements.	p. 152-154, 176
	RF9.5 Résoudre un problème en modélisant une situation comportant une équation exponentielle ou logarithmique.	p. 152-154, 174-176
	RF9.6 Déterminer la solution d'une équation logarithmique et vérifier la solution.	p. 172
	RF9.7 Expliquer pourquoi une solution d'une équation logarithmique peut être une solution étrangère.	p. 172
	RF9.8 Résoudre un problème comportant les échelles logarithmiques telles que l'échelle de Richter et l'échelle de pH.	p. 174
RF10. Démontrer une comprehension de la decomposition en facteurs des polynômes de degré supérieur à 2 (limités aux polynômes de degré ≤ 5 ayant des coefficients entiers). [C, L, CE]	RF10.1 Expliquer en quoi l'algorithme de la division d'un polynôme par un binôme de la forme $x - a$, $a \in$ I, est relié à la division synthétique.	p. 26
	RF10.2 Diviser un polynôme par un binôme de la forme $x - a$, $a \in$ I en ayant recours à l'algorithme de la division ou à la division synthétique.	pp. 26-28
	RF10.3 Expliquer la relation entre le reste d'une division d'un polynôme par $x - a$, $a \in$ I, et la valeur du polynôme quand $x = a$ (théorème du reste).	p. 28
	RF10.4 Expliquer et appliquer le théorème de factorisation pour exprimer un polynôme sous la forme d'un produit de facteurs.	pp. 28-30
	RF10.5 Expliquer la relation entre les diviseurs (facteurs) linéaires d'un polynôme et les zéros de la fonction polynomiale correspondante.	pp. 28-30

Domaine: Relations et Fonctions	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement algébrique et numérique à l'aide de l'étude des relations	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
RF11. Tracer le graphique et analyser des fonctions polynomiales (limitées aux fonctions polynomiales de degré ≤ 5). [C, L, T, V]	RF11.1 Identifier, d'un ensemble de fonctions, lesquelles sont des fonctions polynomiales et expliquer le raisonnement.	p. 22
	RF11.2 Expliquer comment le terme constant et le coefficient de la puissance la plus élevée dans l'équation d'une fonction polynomiale influencent la forme de son graphique.	p. 22
	RF11.3 Formuler des règles générales pour représenter graphiquement des fonctions polynomiales de degré pair ou impair.	p. 24
	RF11.4 Expliquer la relation entre : • les zéros d'une fonction polynomiale; • les racines de l'équation polynomiale correspondante; • les abscisses à l'origine du graphique de la fonction polynomiale.	p. 30
	RF11.5 Expliquer comment la multiplicité des zéros d'une fonction polynomiale influence la forme de son graphique.	p. 32
	RF11.6 Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique d'une fonction polynomiale.	p. 34
	RF11.7 Résoudre un problème en modélisant une situation donnée comportant une fonction polynomiale.	p. 36
	RF11.8 Déterminer l'équation d'une fonction polynomiale état donné son graphique.	p. 36
RF12. Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical). [L, R, T, V]	RF12.1 Esquisser, à l'aide d'une table de valeurs, le graphique de la fonction $y = \sqrt{x}$, et en énoncer le domaine et l'image.	p. 72
	RF12.2 Esquisser le graphique d'une fonction de la forme $y - k = a\sqrt{b(x - \mathrm{h})}$ en appliquant des transformations au graphique de la fonction $y = \sqrt{x}$, et en énoncer le domaine et l'image.	pp. 72-74
	RF12.3 Esquisser le graphique d'une fonction de la forme $y = \sqrt{f(x)}$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$, et expliquer les stratégies utilisées.	pp. 76-78
	RF12.4 Comparer le domaine et l'image de la fonction $y = \sqrt{f(x)}$ au domaine et à l'image de la fonction $y = f(x)$, et expliquer pourquoi les domaines et les images peuvent être différents.	pp. 76-78
	RF12.5 Décrire la relation entre les racines d'une équation comportant des radicaux et les abscisses à l'origine du graphique de la fonction racine correspondante.	p. 78
	RF12.6 Déterminer, graphiquement, une solution approximative d'une équation comportant des radicaux.	p. 78

Domaine: La trigonométrie	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement trigonométrique.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
T1. Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians. [L, CE, R, V]	T1.1 Esquisser un angle (positif ou négatif) en position standard dont la mesure est exprimée en degrés.	p. 84
	T1.2 Esquisser, en position standard, un angle dont la mesure est de 1 radian.	p. 84
	T1.3 Décrire la relation parmi la mesure d'un angle, en degrés et en radians.	pp. 84-86
	T1.4 Esquisser, en position standard, un angle dont la mesure est exprimée sous la forme de $k\pi$ radians, où $k \in \mathbb{Q}$.	p. 86
	T1.5 Exprimer en radians la mesure d'un angle (valeur exacte ou décimale approximative) étant donné sa mesure en degrés.	p. 86
	T1.6 Exprimer en degrés la mesure d'un angle (valeur exacte ou décimale approximative) étant donné sa mesure en radians.	p. 86
	T1.7 Déterminer la mesure, en degrés ou en radians, de tous les angles d'un domaine donné ayant le même côté terminal qu'un angle en position standard.	p. 88
	T1.8 Déterminer la forme générale des mesures, en degrés ou en radians, de tous les angles ayant le même côté terminal qu'un angle en position standard.	p. 88
	T1.9 Expliquer la relation entre la mesure en radians d'un angle en position standard et la longueur de l'arc intercepté d'un cercle de rayon r, et résoudre des problèmes connexes.	p. 88
T2. Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire. [L, R, V]	T2.1 Formuler l'équation du cercle unitaire à partir du théorème de Pythagore.	p. 90
	T2.2 Généraliser l'équation du cercle de centre (0, 0) et de rayon r.	p. 90
	T2.3 Décrire les six rapports trigonométriques à l'aide d'un point $P(x, y)$ qui représente l'intersection du côté terminal d'un angle et du cercle unitaire.	p. 90

Domaine: La trigonométrie	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement trigonométrique.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
T3. Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés. [CE, RP, R, T, V]	T3.1 Déterminer, à l'aide de la technologie, la valeur approximative d'un rapport trigonométrique de tout angle dont la mesure est exprimée en degrés ou en radians.	p. 92
	T3.2 Déterminer, à l'aide d'un cercle unitaire ou d'un triangle de référence, la valeur exacte du rapport trigonométrique d'un angle dont la mesure est exprimée en degrés qui sont des multiples de 0°, 30°, 45°, 60° ou 90°, ou pour des angles dont la mesure est exprimée en radians, qui sont des multiples de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, ou $\frac{\pi}{2}$ et expliquer la stratégie.	p. 92
	T3.3 Esquisser un schéma représentant un problème comportant des rapports trigonométriques.	p. 92
	T3.4 Déterminer, avec ou sans l'aide de la technologie, à partir de la valeur d'un rapport trigonométrique, les mesures exprimés en degrés ou en radians, des angles d'un domaine particulier.	p. 94
	T3.5 Décrire les six rapports trigonométriques à l'aide d'un point P*(x, y)* qui représente l'intersection du côté terminal d'un angle et du cercle unitaire.	p. 94
	T3.6 Déterminer en degrés ou en radians les mesures des angles dans un domaine particulier à partir d'un point situé sur le côté terminal d'un angle en position standard.	p. 94
	T3.7 Déterminer, à partir de la valeur d'un rapport trigonométrique dans un domaine particulier, les valeurs exactes des autres rapports trigonométriques.	p. 96
	T3.8 Résoudre un problème à l'aide des rapports trigonométriques.	p. 96

Domaine: La trigonométrie	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement trigonométrique.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
T4. Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes. [L, RP, T, V]	T4.1 Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique de $y = \sin x$ et $y = \cos x$.	p. 106
	T4.2 Déterminer les caractéristiques (l'amplitude, le domaine, la période, l'image et les zéros) du graphique de $y = \sin x$ et $y = \cos x$.	p. 106
	T4.3 Déterminer l'effet de la variation de la valeur de a sur les graphiques de $y = a \sin x$ et $y = a \cos x$.	p. 108
	T4.4 Déterminer l'effet de la variation de la valeur de b sur les graphiques de $y = \sin bx$ et $y = \cos bx$.	p. 108
	T4.5 Déterminer l'effet de la variation de la valeur de d affects the graph of $y = \sin x + d$ et $y = \cos x + d$.	p. 108
	T4.6 Déterminer l'effet de la variation de la valeur de c sur les graphiques de $y = \sin(x + c)$ et $y = \cos(x + c)$.	p. 108
	T4.7 Esquisser, sans l'aide de la technologie, de graphique de $y = a \sin b(x - c) + d$ et $y = a \cos b(x - c) + d$ à l'aide de transformations et expliquer les stratégies.	p. 108
	T4.8 Déterminer les caractéristiques (l'amplitude, le domaine, la période, le changement de phase, l'image et les zéros) du graphique d'une fonction trigonométrique de la forme $y = a \sin b(x - c) + d$ et $y = a \cos b(x - c) + d$.	p. 108
	T4.9 Déterminer les valeurs de a, b, c et d de fonctions de la forme $y = a \sin b(x - c) + d$ et $y = a \cos b(x - c) + d$ correspondant à un graphique donné et écrire l'équation de la fonction.	p. 110
	T4.10 Résoudre un problème en ayant recours à l'analyse du graphique d'une fonction trigonométrique.	p. 110
	T4.11 Expliquer le lien entre les caractéristiques du graphique d'une fonction trigonométrique et les conditions d'une situation problématique.	p. 110
	T4.12 Déterminer une fonction trigonométrique qui modélise une situation pour résoudre un problème.	p. 110
	T4.13 Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique de $y = \tan x$.	p. 112
	T4.14 Déterminer les caractéristiques (les asymptotes, le domaine, la période, l'image et les zéros) du graphique de $y = \tan x$.	p. 112

Domaine: La trigonométrie	**Résultat d'apprentissage général**: Développer le raisonnement trigonométrique.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians. [L, RP, R, T, V]	T5.1 Déterminer algébriquement la solution d'une équation trigonométrique et exprimer, dans la mesure du possible, la solution sous forme exacte.	pp. 98, 114, 134
	T5.2 Déterminer, à l'aide de la technologie, la solution approximative d'une équation trigonométrique.	pp. 98, 114, 136
	T5.3 Vérifier, avec ou sans l'aide de la technologie, qu'une valeur donnée est une solution d'une équation trigonométrique.	pp. 98, 114, 136
	T5.4 Identifier et corriger toute erreur dans la solution d'une équation trigonométrique.	pp. 100, 136
	T5.5 Établir le lien entre la solution générale d'une équation trigonométrique et les zéros de la fonction trigonométrique correspondante (se limiter aux fonctions sinus et cosinus).	p. 114
T6. Démontrer des identités trigonométriques, y compris : • les identités inverses; • les identités des quotients; • les identités de Pythagore • les identités de la somme ou de différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) • les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V]	T6.1 Expliquer la différence entre une identité trigonométrique et une équation trigonométrique.	pp. 120-122
	T6.2 Déterminer la validité potentielle d'une identité trigonométrique graphiquement à l'aide de la technologie.	pp. 122, 128-130
	T6.3 Déterminer les valeurs non permises d'une identité trigonométrique.	pp. 122, 128-132
	T6.4 Vérifier une identité trigonométrique numériquement pour une valeur donnée en degrés ou en radians.	pp. 124, 128-130
	T6.5 Démontrer la validité d'une identité trigonométrique algébriquement.	pp. 124, 130-132
	T6.6 Simplifier des expressions trigonométriques en utilisant les identités trigonométriques.	pp. 126-130
	T6.7 Déterminer la valeur exacte d'un rapport trigonométrique en ayant recours aux identités de la somme, de la différence et d'angle double.	pp. 128-130
	T6.8 Expliquer pourquoi la vérification de l'égalité entre les deux membres d'une identité trigonométrique pour des valeurs données ne suffit pas pour conclure que l'identité est valable.	p. 132

Domaine: Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton	**Résultat d'apprentissage général:** Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
PCBT1. Appliquer le principe fondamental du dénombrement pour résoudre des problèmes. [C, RP, R, V]	PCBT1.1 Compter le nombre total de choix possibles à l`aide d'organisateurs graphiques tels que des listes et des diagrammes en arbre.	pp. 182-184
	PCBT1.2 Expliquer, à l`aide d'exemples, pourquoi le nombre total de choix possibles est le résultat de la multiplication plutôt que l'addition du nombre de choix individuels possibles	p.186
	PCBT1.3 Résoudre un problème de dénombrement simple en appliquant le principe fondamental du dénombrement.	p. 186
PCBT2. Déterminer le nombre de permutations de n éléments pris *r* à la fois pour résoudre des problèmes. [C, RP, R, V]	PCBT2.1 Compter le nombre d'arrangements possibles des éléments d'un ensemble disposés en rangée à l`aide d'organisateurs graphiques tels que des listes et des diagrammes en arbre.	p. 188
	PCBT2.2 Déterminer, sous la forme de notation factorielle, le nombre de permutations de *n* éléments différents pris *n* à la fois pour résoudre un problème.	p. 188
	PCBT2.3 Déterminer, en ayant recours à diverses stratégies, le nombre de permutations de *n* éléments différents pris *r* à la fois pour résoudre un problème.	p. 190
	PCBT2.4 Expliquer pourquoi *n* doit être supérieur ou égal à *r* dans la notation ${}_nP_r$.	p. 190
	PCBT2.5 Étant donné la valeur de k, $k \in \mathrm{N}$, résoudre une équation comportant la notation ${}_n\mathrm{P}_r = k$ pour *n* ou *r*.	p. 192
	PCBT2.6 Expliquer, à l'aide d'exemples, l'effet d'au moins deux nombres d'éléments identiques sur le nombre total de permutations.	p. 194
	PCBT2.7 Résoudre des problèmes de permutations avec des contraintes.	p. 196

Domaine: Les permutations, les combinaisons et le binôme de Newton	**Résultat d'apprentissage général:** Développer le raisonnement algébrique et numérique comportant la combinatoire.	
Résultat d'apprentissage spécifique *L'élève doit pouvoir:*	**Indicateurs de rendement** *Les indicateurs de rendement aident à déterminer si un élève à atteint ou non le résultat d'apprentissage spécifique correspondant.*	**Pages de référence**
PCBT3. Déterminer le nombre de combinaisons de n éléments différents pris r à la fois pour résoudre des problèmes. [C, RP, R, V]	PCBT3.1 Expliquer, à l'aide d'exemples, la différence entre une permutation et une combinaison.	p. 198
	PCBT3.2 Déterminer le nombre de combinaisons de n éléments différents pris r à la fois pour résoudre un problème.	pp. 198-200
	PCBT3.3 Expliquer pourquoi n doit être supérieur ou égal à r dans la notation ${}_nC_r$ ou $\binom{n}{r}$.	p. 200
	PCBT3.4 Expliquer, à l'aide d'exemples, pourquoi ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ou $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.	p. 200
	PCBT3.5 Étant donné la valeur de k, $k \in \mathrm{N}$, résoudre ${}_nC_r = k$ ou $\binom{n}{r} = k$ pour n ou r.	p. 200
PCBT4. Effectuer le développement d'un binôme de diverses façons, y compris en ayant recours au binôme de Newton (limité aux exposants qui sont des nombres entiers strictement positifs). [L, R, V]	PCBT4.1 Expliquer les régularités dans le développement de $(x + y)^n$, $n \leq 4$ et $n \in \mathrm{N}$, en multipliant n facteurs de $(x + y)$.	p. 202
	PCBT4.2 Expliquer comment déterminer la rangée suivante dans le triangle de Pascal à partir de n'importe quelle rangée.	p. 202
	PCBT4.3 Établir le lien entre les coefficients des termes dans le développement de $(x + y)^n$ et la $(n + 1)$ rangée du triangle de Pascal.	p. 204
	PCBT4.4 Expliquer, à l'aide d'exemples, comment les coefficients des termes dans le développement de $(x + y)^n$ sont déterminés par des combinaisons.	p. 204
	PCBT4.5 Effectuer le développement de $(x + y)^n$ en ayant recours au binôme de Newton.	p. 204
	PCBT4.6 Déterminer un terme particulier du développement d'un binôme.	p. 204

REFERENCES

American Association for the Advancement of Science [AAAS–Benchmarks]. *Benchmarks for Science Literacy.* New York, NY: Oxford University Press, 1993.

Armstrong, Thomas. *7 Kinds of Smart: Identifying and Developing Your Many Intelligences.* New York, NY: Plume, 1993.

British Columbia Ministry of Education. *The Primary Program: A Framework for Teaching*. Victoria, BC: British Columbia Ministry of Education, 2000.

Caine, Renate Nummela and Geoffrey Caine. *Making Connections: Teaching and the Human Brain*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 1991.

Erickson, Tim. *Get It Together*. Berkeley, CA: Equals, 1989.

Government of Newfoundland and Labrador. *Foundations for the Atlantic Canada Mathematics Curriculum.* Halifax, NS: Atlantic Provinces Education Foundation.

Hope, Jack A. et al. *Mental Math in Junior High.* Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1988.

Hope, Jack A. et al. *Mental Math in the Primary Grades.* Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1988.

Keeley, Page and Tobey, Cheryl. *Mathematics Formative Assessment*. California: Corwin Publishing, 2011.

Larson, Roland E. et al. *Algebra 2*. Toronto, ON: D. C. Heath and Company, 1993.

McAskill, Bruce et al. *Pre-Calculus 12*. Toronto, ON: McGraw-Hill Ryerson, 2012.

National Council of Teachers of Mathematics. *Computation, Calculators, and Common Sense: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics.* May 2005. http://www.nctm.org/about/pdfs/position/computation.pdf (Accessed February 22, 2007).

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics,* 2006.

Rubenstein, Rheta N. "Mental Mathematics beyond the Middle School: Why? What? How?" *Mathematics Teacher* 94, 6 (September 2001), pp. 442–446.

Shaw, J. M. and M. J. P. Cliatt. "Developing Measurement Sense." In P. R. Trafton (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics: 1989 Yearbook* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989), pp. 149–155.

Steen, L. A., ed. *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*. Washington, DC: Mathematical Sciences Education Board, National Research Council, 1990.

Western and Northern Canadian Protocol for Collaboration in Basic Education (Kindergarten to Grade 12). *The Common Curriculum Framework for K–9 Mathematics: Western and Northern Canadian Protocol* – May 2006 and *The Common Curriculum Framework for Grades 10–12* – January 2008. Reproduced (and/or adapted) by permission. All rights reserved.

Septembre 2015
ISBN: 978-1-55146-583-8